# Tópicos

# HIDRODINÁMICA

Marco Velarde T. Compilador

# **Ediciones ESPOL – FIMCM**

ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DEL LITORAL



Serie Nuestros Valores No. 26

#### Tópicos Hidrodinámica Ing. Marco G. Velarde T.

Derechos de Autor № 025663 - IEPI ISBN-10: ISBN-9978-310-39-8 ISBN-13: ISBN-978-9978-310-39-7

Primera Edición: Diciembre 2006

Ediciones ESPOL - FIMCM 2006 Escuela Superior Politécnica del Litoral Facultad de Ingeniería Marítima y Ciencias del Mar Campus "Gustavo Galindo V." Km. 30.5, vía Perimetral Teléfonos: 2269450 / 2269451 / 2269452 www.fimcm.espol.edu.ec

#### Diseño de Portada:

Aristóteles Pérez V.

Impresión: Centro de Difusión y Publicaciones - ESPOL

Guayaquil - Ecuador

Ninguna parte de este libro puede ser reproducida o transmitida en cualquier forma o cualquier medio electrónico o mecánico, incluyendo fotocopíado. grabación o por cualquier sistema de almucenamiento o captación sin permiso escrito del autor.

## A MANERA DE INTRODUCCIÓN

Cuando estamos inmersos en un ambiente lleno de recursos tecnológicos es gratificante ver la concreción de una idea, que fuera planteada a Marco Velarde, en el sentido de hacer una publicación sobre los conceptos fundamentales de la hidrodinámica, lo suficientemente clara, sencilla, sin explicaciones que tengan altas complejidades matemáticas, con la finalidad de que sirva de texto o de material de referencia para los estudiantes, especialmente los de nivel de pregrado, y que su contenido sea asimilable sin mayores dificultades.

Cuando tuve el honor de desempeñar la Presidencia del Instituto Panamericano de Ingeniería Naval (IPIN), motivé, apoyé y promocioné la aparición de publicaciones técnicas para los estudiantes de las universidades miembros del IPIN y ventajosamente encontré en las autoridades de la Escuela Superior Politécnica del Litoral (ESPOL) a los más entusiastas aliados para concretar esta idea.

El presente libro, editado por la ESPOL, sin lugar a dudas será un referente para el estudio de esta área de las ciencias y podrá servir de motivación para que el estudiante continúe en su búsqueda de la excelencia profesional. Esta obra tiene una especial característica didáctica, puesto que conjuga lo tradicional con lo moderno, en el tratamiento de los temas que desarrolla, y junto con las ayudas audiovisuales y computacionales que existen en la actualidad permiten asegurar la calidad en la formación de los estudiantes orientados a las profesiones relacionadas al mar y de las ramas de la ingeniería que manejan el tema de los fluidos.

Ing. Cristóbal Mariscal Díaz Profesor Principal FIMCM " Para mis cuatro Marías "

.

# PRÓLOGO

Los cambios tecnológicos ocurridos en los últimos años rebasan la imaginación de los más optimistas. El uso generalizado de la informática ha facilitado y acelerado el avance en la aplicación de los conceptos teóricos, en todos los campos de la ciencia y de la tecnología. Con la ayuda del computador es posible ahora visualizar a la Hidrodinámica de una manera más amigable e interesante, por tanto, menos aburrida y complicada. Lo que está por venir no es fácil percibirlo en su real dimensión, sin embargo, los tratados clásicos sobre las ciencias siempre tendrán vigencia, por su valor intrínseco y por las nuevas aplicaciones que están permitiendo a los investigadores y estudiosos obtener nuevas lecturas de esos clásicos.

La difusión de la ciencia, mediante libros y textos en los países en vías de desarrollo, depende de la producción de autores-investigadores que generalmente publican en inglés, idioma que, aunque está difundido mundialmente, ofrece ciertas dificultades en la interpretación de su lectura, por lo que se justifica la necesidad de compilar y editar textos en español para la gran mayoría de estudiantes que no dominan esa lengua.

Cuando se quiere preparar un libro y no se realiza investigación en un área específica, la alternativa válida es la investigación bibliográfica, la recopilación y selección de información existente, el ordenamiento de notas de aula y la experiencia docente. La compilación de "Tópicos HIDRODINAMICA", y mi interés por esta rama de la ciencia y de la ingeniería, se inició en mi etapa de estudiante de Ingeniería y Arquitectura Naval de la Escuela Superior Politécnica del Litoral (ESPOL), de Guayaquil, Ecuador; continuó como estudiante de posgrado de la especialización de Hidrodinámica, en la Universidad Federal de Río de Janeiro, Brasil, en donde realicé investigaciones para mi Tesis de Maestría titulada, "Determinación de las Características Hidrodinámicas para Buques Cargueros en Proyecto Preliminar"; y como profesor de pre-grado, durante alrededor de ocho años, de las materias Introducción a la Hidrodinámica, Hidrodinámica, Dinámica del Buque y Control y Maniobras, en la Facultad de Ingeniería Marítima y Ciencias del Mar (FIMCM) de la ESPOL. El material presentado es el resultado de la recolección de notas de clase de pre y posgrado, traducciones de textos en inglés y portugués, interpretaciones libres de esas traducciones, modificaciones, adaptaciones y aportes personales. Se han tomado como referencias principales textos clásicos de Hidrodinámica, Hidrodinámica Aplicada, Mecánica y Dinámica de Fluidos, y se ha consultado información en Internet, entre otras fuentes.

La literatura en inglés sobre Hidrodinámica es abundante, por lo que resulta hasta cierto punto complicada la selección de los tópicos a ser incluidos en un libro. En el presente caso opté por los siguientes temas: Fluidos ideales, fluidos reales, redes de flujo y configuraciones de flujo, hidrodinámica de cuerpos moviéndose en régimen permanente, teoría de olas y modelos matemáticos de movimiento de fluidos. Esta estructura permitirá que el libro sea considerado como una ayuda para estudiantes de ingeniería naval, oceanografía, e ingeniería mecánica, de petróleo y civil. Los cinco primeros capítulos del libro contienen material para el dictado de un curso básico o introductorio; el último capítulo, junto con los Anexos B y C, requieren de mayores conocimientos teóricos y matemáticos y podrían formar parte de un curso más avanzado de Hidrodinámica.

El presente libro ha sido sometido al manejo y comentarios de los docentes de las Facultades de Ingeniería Marítima y Ciencias del Mar y de Ingeniería en Mecánica y Ciencias de la Producción de la ESPOL. En la FIMCM lo han utilizado para sus clases los profesores Bolívar Vaca, Miguel Fierro, y Enrique Sánchez, a quienes agradezco por sus observaciones y sugerencias. En igual forma agradezco los comentarios hechos por varios alumnos que conocieron el texto y tomaron el curso.

Mis agradecimientos a las autoridades de la ESPOL, FIMCM y FUNDESPOL; a mis colegas profesores, por el apoyo prestado para la publicación de este libro; a los estudiantes Douglas Toro y Douglas Landívar por su excelente trabajo y dedicación en el mecanografiado y elaboración de gráficos, fórmulas y tablas y, al Centro de Difusión y Publicaciones de la ESPOL.

El principal interés que me ha motivado para editar el libro "Tópicos de HIDRODINAMICA", es aportar al conocimiento mediante la difusión de información técnica de fácil uso para los estudiantes y demás personas interesadas en esta importante y apasionante área de la ciencia. El presente libro no tiene fines de lucro.

Marco G. Velarde T. Profesor Principal FIMCM

### INDICE

Prólogo		
A Manera de Introducción		
1. Flujo de Fluidos Ideales		
<ul> <li>1.1 Propiedades de los Fluidos</li> <li>1.2 Ecuación de Continuidad</li> <li>1.3 Condiciones de Contorno</li> <li>1.4 Líneas de Corrientes</li> <li>1.5 Trayectorias de Flujo Bidimensional</li> <li>1.6 Flujo Rotacional e Irrotacional</li> <li>1.7 Funciones de Corriente</li> <li>1.8 Funciones de Potencial de Velocidad</li> <li>1.9 Ecuación de Euler para Fluido no Viscoso</li> <li>1.10 Ecuación de Bernoulli</li> <li>1.11 Distribuciones de Presión y Velocidad</li> <li>1.12 Consideraciones sobre Energía</li> </ul>	3 10 14 17 19 24 28 35 45 49 53 59	
2. Flujo de Fluidos Reales	64	
<ul> <li>2.1 Efectos de la Viscosidad</li> <li>2.2 Flujo Laminar</li> <li>2.3 Flujo Turbulento y Capa Límite</li> <li>2.4 Velocidades en la Capa Límite</li> <li>2.5 Separación de la Capa Límite</li> <li>2.6 Ecuación de Bernoulli</li> </ul>	64 65 73 79 83 86	
3. Gráficos de Redes de Flujo	88	
<ul> <li>3.1 Método Gráfico</li> <li>3.2 Método por Análisis Numérico</li> <li>3.3 Analogías Experimentales</li> <li>3.3.1 Analogía de la Membrana</li> <li>3.3.2 Analogía Eléctrica</li> <li>3.3.3 Analogía de Flujo Viscoso</li> <li>3.4 Redes de Flujo</li> <li>3.5 Configuraciones Estándar de Flujos</li> </ul>	88 92 98 98 101 102 103 105	

4	Hidrodinámica	de un Cuerpo Moviéndose en Régimen Permanente	115
	4.1 Consider	raciones Generales	115
	4.2 Teoría P	otencial aplicada al Estudio de la Hidrodinámica	
	de los C	uerpos	120
	4.3 Potencia	al de Velocidades	122
	4.3.1	Para un Cilindro de Sección Circular de radio = r0	123
	4.3.2	Cilindro de Sección Circular en presencia de Vórtice	
		de radio = $r0$	124
	4.3.3	Cilindro de Sección Circular en presencia de una Fuente	126
E	Teoría de Oleo		130
Э	l'eoria de Olas		128
	5.1 Formación	n y Generación de Olas	128
	5.1.1	Olas de Aguas Profunda	129
	5.1.2	Olas de Agua Rasa	129
	5.2 Rompimie	ento de Olas	129
	5.3 Velocidad	l de la Ola	131
	5.4 Predicción	n de Altura y Longitud de Ola	132
	5.5 Clasificac	ión de las Olas	134
	5.5.1	Ola Progresiva	136
	5.5.2	Ola Estacionaria	141
	5.6 Presion de	e la Ola	143
	5.7 Embarcac	ion en Olas	145
6	Movimiento de	Fluidas · Madelas Matemáticas	150
U	www.intento.uc	Findus . Modelos Matematicos	150
	6.1 Ecuacione	es Integrales	151
	6.1.1	Conservación de Masa	151
	6.1.2	Cantidad de Movimiento	155
	6.1.3	Cantidad de Movimiento Angular	157
	6.1.4	Conservación de Energía	159
	6.1.5	Segunda Ley de Termodinámica	162
	6.2 Ecuacion	les Diferenciales	162
	6.2.1	Continuidad	163
	6.2.2	Cantidad de Movimiento	164
	6.2.3	Cantidad de Movimiento para Flujo sin arrastre	168
	6.2.4	Relacion de la Tasa de Tensión - Deformación	169
	0.2.5	Ecuaciones de Navier-Stokes	171
	6.2.6	Ecuación de la Energia	173
	0.2.7	Segunda Ley de Termodinamica y la Entropia	175

6.3	Metodolo	gía para Resolver Problemas	176
	6.3.1	Formas Especiales de la Ecuaciones Integrales	177
	6.3.2	Formas Especiales de las Ecuaciones Diferenciales	177
	6.3.3	Solución de Problemas	178

### ANEXOS

#### Anexo A:

182
183
184
186
188

3. Deducción de la Ecuación de Continuidad 193 4. Relación entre las ecuaciones de Cauchy, Navier-Stokes y Euler. 196

è

10 C

### FLUIDOS IDEALES.

#### 1.1 PROPIEDADES DE LOS FLUIDOS.

Un fluido es un material que fluye. Su capacidad de fluir que lo distingue de un sólido, resulta del hecho de que sus partículas pueden desplazarse bajo la acción de fuerzas de corte.

Al igual que los sólidos, los fluidos presentan considerable resistencia a la compresión y a los esfuerzos de tensión, pero todo fluido se deforma en forma continua bajo la acción de los esfuerzos de corte. Si la razón de corte-deformación es pequeña, la resistencia que ofrece el fluido es despreciable y al incrementar la razón de deformación se incrementa la resistencia la cual desaparece una vez que el movimiento de deformación cesa. La resistencia aumenta debido a la existencia de viscosidad en el fluido.

Un fluido Newtoniano es aquel en el cual el esfuerzo de corte, en una dirección de flujo, es proporcional al porcentaje de deformación determinado por el gradiente de velocidad a través del flujo, entonces:

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} \qquad (1.1)$$

donde:

τ - Esfuerzo cortante en la dirección x sobre el plano normal al eje y.

u - Velocidad en dirección x variando solamente con y.

 $\mu$  - Constante de proporcionalidad, es la viscosidad dinámica o coeficiente de viscosidad, el cual para algún fluido particular varía significativamente solo con la temperatura (Ver Fig. 1.1).



Fig. 1.1. - Relación entre esfuerzo de corte y gradiente de velocidad de un flujo unidimensional entre placas paralelas.

(a) Placa superior moviéndose en su propio plano; gradiente de presión cero.

(b) Ambas placas fijas; gradiente de presión negativa. (Vallentine, H.R. 1967).

Los fluidos comunes, aire, agua y aceites ligeros de petróleo son fluidos Newtonianos. Los fluidos no Newtonianos, que no siguen la ecuación (1.1), no son utilizados en ingeniería y no serán considerados.

Un líquido es un fluido que a determinada temperatura ocupa un volumen definitivo que es poco afectado por cambios de presión. Colocado en un recipiente estacionario, el líquido ocupará la parte inferior del recipiente y forma una superficie libre. En muchos cálculos hidráulicos los líquidos pueden ser considerados incompresibles. Por ejemplo, bajo cualquier condición, es conveniente y razonable considerar al gas, aire atmosférico, como incompresible en vista de que las velocidades involucradas son pequeñas comparadas con la velocidad del sonido en el gas.

La aproximación matemática al estudio de flujo de fluidos se simplifica si se lo considera fluido perfecto o ideal el cual posee viscosidad cero. Al igual que los fluidos reales, el ideal tiene densidad pero no ofrece resistencia al corte de deformación y por lo tanto se considera que no posee esfuerzos de corte. No presenta efectos de tensión superficial, no se vaporiza y la cavitación o formación de bolsas de vapor a baja temperatura no existe. La densidad y presión del fluido, la velocidad y aceleración, si varían con la posición, se asume lo hacen en forma continua de un punto a otro, excepto en puntos aislados, líneas o superficies de discontinuidad, las cuales son llamadas "Singularidades".

#### Presión en un Punto

Toda materia a escala muy pequeña, es discontinua. Para evitar significados ambiguos a términos como densidad, velocidad, o presión en un "punto", es necesario definir un punto como un volumen muy pequeño el cual es todavía muy grande comparado con el espaciamiento de las moléculas fluidas. Alternativamente, se asume que el fluido es un medio continuo en el cual los valores puntuales corresponden a los valores promedio en los volúmenes pequeños mencionados anteriormente.

Las fuerzas que actúan sobre el elemento de una masa fluida se clasifican, por conveniencia, en fuerzas de cuerpo y fuerzas de superficie. Una fuerza de cuerpo es una fuerza externa proporcional al volumen del elemento y actúa "a una distancia" a través de su centro de masa. La gravedad es la única fuerza de cuerpo con la cual el Ingeniero Hidraúlico tiene que ver. Una fuerza de superficie es una fuerza interna con una magnitud proporcional al área bajo la cual actúa. La presión interna y las fuerzas de corte son las fuerzas de superficie involucradas en un flujo. En fluido ideal al no existir fuerzas tangenciales y de corte las únicas fuerzas de superficie son las de presión normales a las áreas donde actúan.

La interrelación de los esfuerzos en un punto, resultantes de estas fuerzas para un sistema bidimensional de flujo ideal se presenta en la siguiente figura :



Fig.1.2. – Fuerzas actuando sobre un elemento de fluido en flujo bidimensional no viscoso. (Vallentine, H.R. 1967).

Para propósitos de generalizar, el eje y está inclinado un cierto ángulo  $\beta$  con respecto a la línea de acción de la gravedad. Las longitudes de los lados del elemento triangular son a, b, c respectivamente, y las presiones normales correspondientes son  $p_x$ ,  $p_y$ ,  $p_{\alpha}$ . La densidad del fluido es  $\rho$  y la aceleración debido a la gravedad es g.

Capítulo I

La suma de las componentes, en el sentido x, de las fuerzas actuando sobre el elemento dentro del fluido es igual al producto de la masa del elemento por su aceleración  $a_x$ , en la dirección x. De acuerdo con la segunda ley del movimiento de Newton tenemos:

$$p_{x} a - p_{\alpha} c \operatorname{sen} \alpha + \frac{1}{2} \rho a b g \operatorname{sen} \beta = \frac{1}{2} a b a_{x}$$

$$p_{x} - p_{\alpha} + \frac{1}{2} \rho b g \operatorname{sen} \beta = \frac{1}{2} b a_{x}$$
(1.2)

Para considerar el esfuerzo en un punto hacemos que  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  se aproximen a cero, y la ecuación se reduce a:

$$p_x - p_\alpha = 0$$

Dando un tratamiento similar a las componentes de la fuerza que actúan en la dirección y se demuestra que :

$$p_v - p_\alpha = 0$$

y de ahí, tenemos:

$$\mathbf{p}_{\mathbf{x}} = \mathbf{p}_{\mathbf{y}} \tag{1.2 a}$$

Para el caso tridimensional, tendremos :

encuentra en el punto P y esta definido por:

$$\mathbf{p}_{\mathbf{x}} = \mathbf{p}_{\mathbf{y}} = \mathbf{p}_{\mathbf{z}} \tag{1.2 b}$$

de tal forma, que en fluido ideal, aún si el fluido está acelerado, la presión en un punto es la misma en todas las direcciones.

#### Velocidad

Consideremos que el fluido es continuo. Se puede definir una partícula fluida como constituida por un fluido contenido dentro de un volumen infinitesimal, o sea, un volumen cuyas dimensiones pueden ser consideradas tan pequeñas, de tal forma que sus dimensiones lineares son despreciables. Por tanto, podemos tratar a la partícula fluida como un punto geométrico para propósitos de estudiar su velocidad y aceleración. Consideremos la siguiente figura, en la cual, una partícula dada en un instante t, se

$$r = OP$$



Fig. 1.3. - Velocidad de una partícula fluida.

y que en un tiempo  $t_1$  la misma partícula, se habrá movido hacia el punto Q, y estará definida por :

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{OQ}$$

La velocidad de la partícula en el punto P se la define por el vector :

$$q = \lim \frac{r_1 - r}{t_1 - t} = \frac{dr}{dt}$$

Entonces la velocidad q es una función de r y de t:

$$q = f(r, t)$$

Si la forma de la función **f** es conocida, entonces conoceremos el movimiento del fluido y podríamos en cada punto dibujar una pequeña línea para representar el vector **q**.

Como se muestra a continuación :



Fig. 1.4. - Campo de velocidad definido por un vector.

Para obtener la concepción física del campo de velocidad definido por el vector  $\mathbf{q}$ , imaginemos un fluido constituido por un gran número de puntos luminosos moviéndose junto con el fluido.

Si tomamos una fotografía de este fluido, se podrán observar las trayectorias de los puntos luminosos como pequeñas líneas, que son proporcionales a las distancias recorridas por el punto, en el tiempo dado y proporcionales a su velocidad.

Este tipo de fotografías pueden revelar una cierta regularidad del campo de velocidad, en el cual las pequeñas trayectorias parecen formar parte de un sistema regular de curvas. Este movimiento se lo describe como un movimiento "uniforme"de líneas de corriente (streamline). Si por el contrario las trayectorias son irregulares y se cruzan entre si, el movimiento descrito se lo conoce como "turbulento".

#### Densidad

Si M es la masa de un fluido dentro de un volumen cerrado V, podemos escribir:

$$M = V \rho_1$$

donde  $p_1$ : densidad promedia del fluido dentro del volumen dado, en cierto instante.

En un medio continuo hipotético podemos definir densidad  $\rho$  como el límite de  $\rho_1$  cuando  $V \rightarrow 0$ 

#### Presión

Consideremos un plano pequeño de área infinitesimal  $d\sigma$  con centroide **P** situado en el fluido, y dibujemos la normal **PM** en uno de los lados del área al cual consideraremos positivo. El otro lado será considerado negativo. Podemos asumir que la acción mutua de las partículas del fluido sobre los dos lados del área, en un instante dado, puede representarse por dos fuerzas iguales pero opuestas **pdo** aplicadas en el punto **P**. Cada una de estas fuerzas serán de empuje, lo que quiere decir que el flujo sobre el lado positivo del área, empuja al fluido del lado negativo con una fuerza igual a **pdo**.



Fig. 1.5. - Presión en un plano.

Experimentalmente se demuestra que en un fluido en reposo estas fuerzas actúan a lo largo de la normal. En un fluido real en movimiento estas fuerzas forman un ángulo  $\varepsilon$  con la normal, análogo al ángulo de fricción. Cuando la viscosidad es pequeña como en el caso del aire y del agua el ángulo  $\varepsilon$  es pequeño. En un fluido no viscoso,  $\varepsilon = 0$ ; p se define como PRESION en el punto P. Debemos notar que la presión p es independiente de la orientación del área d $\sigma$ . Por tanto, la presión en un punto en un fluido no viscoso es independiente de la dirección.

#### Presión Hidrodinámica

En un líquido en reposo existe en cada punto una presión hidrostática  $p_H$ . El principio de Arquímedes establece que un cuerpo sumergido en un fluido es empujado hacia arriba con una fuerza igual al peso del líquido desalojado. Las partículas del líquido también están sujetas a este principio pero se mantienen en equilibrio bajo la acción de la presión hidrostática y de la fuerza de gravedad, o sea que el valor

$$\frac{p_H}{\rho} + gh$$

es constante para todo el líquido. Cuando el líquido está en movimiento el principio de boyantez actúa, y podemos escribir :

$$p = p_D + p_H$$

Por el teorema de 'Bernoulli tenemos que :

$$\frac{p_D}{\rho} + \frac{1}{2}q^2 + \frac{p_H}{\rho} + gh = C$$

entonces :

$$\frac{p_{\rm D}}{\rho} + \frac{1}{2}q^2 = C'$$

donde :

$$C' = C - \left(\frac{p_H}{\rho} + gh\right)$$
 es una nueva constante

La penúltima ecuación sería correcta para el caso en que no existiera la gravedad.

La cantidad  $p_D$ , llamada presión hidrodinámica corresponde a la presión debido al movimiento. Esta presión mide la fuerza con la cual las partículas se mantienen juntas. El conocimiento de esta presión permitirá calcular el efecto total de la presión del fluido sobre un cuerpo sumergido, añadiendo al valor de  $p_D$  el efecto debido a  $p_H$ , el cual puede determinarse a partir del principio de hidrostática.

La presión hidrodinámica es mayor cuando la velocidad es baja y sus valores mayores ocurren en los puntos donde la velocidad es cero.

#### 1.2 ECUACIÓN DE CONTINUIDAD

Las componentes de la velocidad y de la densidad de un fluido en un punto, están relacionadas con los requerimientos de que el fluido debe ser continuo, en el espacio y en el tiempo. Las relaciones se mantienen para fluidos viscosos y no viscosos.

Consideremos un paralelepípedo elemental de dimensiones,  $\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $\delta z$  a través del cual un fluido está fluyendo.

<sup>&</sup>lt;sup>\*</sup> Teorema de Bernoulli: Para un líquido no viscoso en régimen permanente la cantidad  $p/\rho + K$ tiene el mismo valor para cada punto de una misma línea de corriente; donde  $p y \rho$  son la presión y densidad, y K es la energía por unidad de masa del fluido.



Fig. 1.6. - Ecuación de Continuidad. Masa fluyendo en la dirección x a través de las caras de un paralelepípedo en flujo tridimensional. (Applied Hydrodynamics, 1967).

Si el centro del elemento es el punto (x, y, z) y las componentes de velocidad en un tiempo t, en ese punto son respectivamente u, v, w, entonces, la razón de flujo de masa que pasa por el centro a través del elemento en la dirección x es :

(Masa por unidad de volumen) x velocidad x área =  $\rho u \delta y \delta z$ 

La razón de flujo de masa que entra a través de la cara más cercana al origen a una distancia  $\frac{1}{2} \delta x$ , es :

$$\left[\rho u - \frac{\partial(\rho u)}{\partial x}\frac{1}{2}\delta x\right]\delta y \delta z$$

y la razón de flujo que sale a través de la cara más lejana al origen a una distancia ½ δx es:

$$\left[\rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x}\frac{1}{2}\delta x\right]\delta y\delta z$$

La ganancia neta en masa por unidad de tiempo dentro del elemento, en estas dos caras es:

$$-\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}\delta x\delta y\delta z$$

11

Capítulo I

En forma similar, las ganancias en masa por unidad de tiempo en los otros dos pares de caras son :

$$-\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}\,\delta x\,\delta y\,\delta z \qquad y \qquad -\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\,\delta x\,\delta y\,\delta z$$

La ganancia total en masa por unidad de tiempo en todas las caras es :

$$-\left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\right] \delta x \, \delta y \, \delta z = \frac{\partial \rho}{\partial t} \, \delta x \, \delta y \, \delta z$$

la cual es igual a la razón instantánea de variación de la masa dentro del paralelepípedo o razón de incremento en masa con el tiempo.

$$-\frac{\partial}{\partial t}(\rho \delta x \delta y \delta z) \qquad \mathbf{y} \qquad -\frac{\partial \rho}{\partial t} \delta x \delta y \delta z$$

por tanto :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho w)}{\partial z} = 0 \quad (1.3)$$

es la ECUACIÓN DE CONTINUIDAD.

Esta ecuación es aplicable a todos los puntos del fluido, excepto en singularidades aisladas. Para fluidos incompresibles, con  $\rho$  constante, la ecuación de continuidad se reduce a :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$
(1.4)

Si la componente de velocidad es constante en una dirección, por ejemplo en la dirección z, los términos correspondientes desaparecen de la Ecuación de Continuidad y esta se reduce a la forma bidimensional

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{1.5}$$

Al considerar el caso unidimensional se obtiene la forma más simple de la ecuación de continuidad.

En la figura que sigue, el volumen en forma de tubo está localizado en un flujo que fluye solo axialmente.



Fig. 1.7. – Ecuación de Continuidad. Flujo de masa a través de las caras de un tubo de corriente. (Applied Hydrodynamics, 1967).

Si el área seccional y la velocidad media del flujo a lo largo de su longitud son A y V respectivamente y son funciones de la distancia, s, a lo largo del eje del tubo, una aproximación similar a la adoptada anteriormente sería :

$$\frac{\partial(\rho A)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho AV)}{\partial s} = 0$$

Para fluido incomprensible con  $\rho$  constante y A función de s y t como en un flujo inestable en canal abierto :

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial (AV)}{\partial s} = 0$$

Y para flujo constante.

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0$$

por tanto :

$$\frac{d(AV)}{ds} = 0 \quad \therefore \qquad \text{AV} = \text{constante} \tag{1.6}$$

13

#### 1.3 CONDICIONES DE CONTORNO

Los datos necesarios para el análisis de un problema de flujo deben incluir suficiente información concerniente a sus límites, incluyendo cualquier localización arbitraria del fluido dentro o fuera del contorno. El análisis consiste en la aplicación de los principios de mecánica de fluidos para predecir el comportamiento del fluido bajo esas condiciones de contorno.

Las condiciones de borde deben incluir, su naturaleza, esto es, si es sólido, fluido o superficie libre; forma geométrica, distribución de presión o la distribución de velocidad a lo largo o a través.

Un flujo ideal a lo largo de un contorno sólido se asume permanece en contacto con él sin penetrarlo, de tal forma que una partícula del fluido sobre dicho contorno puede no tener componente de velocidad normal al mismo. Si el contorno se está moviendo, la velocidad normal al contorno de una partícula en un punto de él debe ser igual a la velocidad del contorno en ese punto.

Si l, m, n representan los cosenos directrices de la normal a la superficie en un punto o sea, los cosenos de los ángulos entre las componentes de velocidad u, v, w de las partículas y la normal dibujada sobre el fluido, las componentes u, v, w a lo largo de la normal serán lu, mv, nw respectivamente, y la velocidad de la partícula a lo largo de la normal a la superficie, será igual a la suma aritmética de estas componentes.



Fig. 1.8. - Relaciones de Velocidad en un contorno sólido. (Vallentine, H.R. 1967).

Si la velocidad normal del contorno en uno de sus puntos es igual a Vn entonces :

$$lu + mv + nw = Vn \qquad (1.7 a)$$

y si el contorno es estacionario :

$$lu + mv + nw = 0$$
 (1.7 b)

Es evidente que una partícula fluida sobre un contorno estacionario o en movimiento permanecerá en contacto con él, y sus movimientos serán tangenciales al contorno. Sin embargo existirán puntos aislados o líneas de discontinuidad donde las partículas fluidas dejan el contorno.

Si la ecuación de la superficie de un contorno es :

$$F(x, y, z, t) = 0$$

las coordenadas de cualquier partícula del fluido sobre el contorno satisfarán esta ecuación.

Supongamos que en un instante  $\delta t$  una partícula se mueve a lo largo del contorno en una pequeña distancia  $\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $\delta z$ . Esta nueva posición debe satisfacer la ecuación de la superficie de contorno y el cambio de  $\delta F$  debe ser igual a cero.

$$\delta \cdot F = \frac{\partial \cdot F}{\partial \cdot x} \delta \cdot x + \frac{\partial \cdot F}{\partial \cdot y} \delta \cdot y + \frac{\partial \cdot F}{\partial \cdot z} \delta \cdot z + \frac{\partial \cdot F}{\partial \cdot t} \delta \cdot t = 0$$
$$\frac{\delta \cdot F}{\delta \cdot t} = \frac{\partial \cdot F}{\partial \cdot x} \frac{\delta \cdot x}{\delta \cdot t} + \frac{\partial \cdot F}{\partial \cdot y} \frac{\delta \cdot y}{\delta \cdot t} + \frac{\partial \cdot F}{\partial \cdot z} \frac{\delta \cdot z}{\delta \cdot t} + \frac{\partial \cdot F}{\partial \cdot t} = 0$$

Si  $\delta t \rightarrow 0$ , tendremos :

$$\frac{d.F}{d.t} = u\frac{\partial.F}{\partial.x} + v\frac{\partial.F}{\partial.y} + w\frac{\partial.F}{\partial.z} + \frac{\partial.F}{\partial.t} = 0$$
(1.7 c)

donde u, v, w son las componentes de velocidad de las partículas.

Esta ecuación debe satisfacer a todos los puntos ubicados sobre una superficie de contorno, excepto a los puntos de discontinuidad, en la configuración de un flujo.

Además de las condiciones cinemáticas para los contornos sólidos, existen otras condiciones físicas de contorno que deben ser conocidas. Los fluidos no viscosos y estacionarios ejercen fuerzas de presión normales a los elementos del contorno sólido,

mientras que las fuerzas ejercidas por fluidos viscosos en movimiento tienen componentes tangenciales (corte) y normales.

Cuando dos fluidos diferentes entran en contacto, la presión debe ser la misma en cada fluido en un punto sobre la superficie de contacto, o sea, la presión no puede incrementarse repentinamente a lo largo de una línea que pasa a través de la superficie.

Para el caso de movimiento de un cuerpo bajo la acción de fuerzas finitas a través de un fluido que se extiende hacia el infinito, una condición esencial que debe cumplirse para la velocidad del fluido en el infinito, es que no debe sufrir cambios por acción del movimiento del cuerpo.

#### Ejemplo :

El perfil parabólico:  $\mathbf{y} = \mathbf{k} \mathbf{x}^{1/2}$  se mueve en la dirección  $\mathbf{x}$  negativa con una velocidad  $\mathbf{U}$  a través de un fluido inicialmente estacionario. Si  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  son las componentes instantáneas de velocidad de una partícula del fluido sobre el contorno, demostrar que :

$$\frac{v}{u-U} = \frac{k^2}{2y}$$

#### Solución :

La ecuación de movimiento del perfil es :

 $y = k (x - Ut)^{1/2}$ ó  $y^2 = k^2 (x - Ut)$ ó  $F = y^2 - k^2 (x - Ut) = 0$ 

con el valor t medido desde el instante en que el perfil es tangencial al eje y, siendo U negativa.

Debido a que dF / dt = 0 para todas las partículas del perfil :

$$\frac{dF}{dt} = u\frac{\partial .F}{\partial .x} + v\frac{\partial .F}{\partial .y} + \frac{\partial .F}{\partial .t} = -uk^2 + 2vy + Uk^2 = 0$$
$$2vy = (u - U)k^2$$
$$\frac{v}{u - U} = \frac{k^2}{2y}$$

16

Si consideramos que los ejes coordenados se mueven con el perfil, U viene a ser igual a cero, entonces el perfil es tangencial al eje y, y para las partículas del fluido en contacto con él, la ecuación anterior quedaría :

$$\frac{v}{u} = \frac{k^2}{2y}$$

esto significa que la pendiente v/u del vector velocidad, es igual a la pendiente del perfil, o sea :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \left( kx^{1/2} \right) = \frac{k^2}{2y}$$

#### 1.4 LÍNEAS DE CORRIENTE

El análisis de una condición particular de flujo para la determinación de presión y velocidades involucra la determinación del patrón de flujo o trayectoria del flujo. El flujo puede ser bidimensional, en este caso, sus características de velocidad y presión varían solo en dos direcciones, digamos x y y. No existe variación del flujo en la dirección z, de tal forma que las trayectorias del flujo sobre todos los planos, en un fluido normal al eje z, son las mismas.

En flujo tridimensional, el flujo característico varía en las direcciones x, y i z. Una clase especial del flujo tridimensional es el flujo simétrico axial o axisimétrico, que se muestra a continuación, en el cual la trayectoria del flujo en todos los planos conteniendo a los ejes es la misma.



Fig. 1.9 – Ejemplo de flujo tridimensional asimétrico (Milne-Thomson, 1968).

A la línea tangente en todos los puntos de los vectores velocidad en un instante dado, se la conoce como línea de corriente. Por ejemplo, en la trayectoria bidimensional de la siguiente figura, la línea que pasa por el punto P(x,y) es tangencial al vector velocidad V en el punto P. Si u y v son las componentes de V en los sentidos x i y respectivamente tenemos :



Fig. 1.10. – Definición de líneas de corriente

 $\frac{v}{u} = tag\theta = \frac{dy}{dx} \quad (1.8 \text{ a})$  $\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} \quad (1.8 \text{ b})$  $u \, dy - v \, dx = 0 \quad (1.8 \text{ c})$ 

Para flujo tridimensional, la relación correspondiente es :

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}$$
(1.8 d)

Es evidente que no existe flujo a través de una línea de corriente. Una superficie a través de la cual no puede existir flujo, en flujo tridimensional, es una superficie de corriente, y una superficie de corriente en forma de tubo es un tubo de corriente.

#### 1.5 TRAYECTORIAS DE FLUJO BIDIMENSIONAL

Para representar la configuración de un flujo hay que determinar en forma analítica, gráfica o experimental un número arbitrario de líneas de corriente. Esta selección se hace de tal forma que las líneas de corriente dividan al flujo en un número de canales con igual razón de flujo. Si la razón del flujo total es igual a Q por unidad de profundidad normal al plano de las líneas de corriente, y el número de canales es **n**, el flujo a través de cada canal será igual a :

$$q = \frac{Q}{n}$$

La velocidad media V en cualquier canal de ancho igual a b será igual a :

$$V = \frac{q}{b}$$

y por lo tanto, la velocidad en cualquier punto de la configuración del flujo es inversamente proporcional al espaciamiento entre líneas de corriente en este punto.

En la Fig. 1.11 que sigue, tenemos un flujo bidimensional entrando a un conducto. El flujo está representado por cuatro líneas de corriente, dos de las cuales coinciden con el contorno sólido del conducto y, el flujo total está dividido en tres canales.



Fig. 1.11 – Flujo bidimensional en la entrada de un conducto. La distribución de velocidad está determinada por el espaciamiento relativo de las líneas de corriente. (Vallentine, H.R. 1967).

Si consideramos que la sección mostrada es la región de flujo uniforme dentro del conducto, donde la velocidad es  $V_o$  y el ancho del canal es  $b_o$ , entonces para cualquier punto P tendremos :

$$V_1 b_1 = V_0 b_0$$
$$V_1 = V_0 \frac{b_0}{b_1}$$

Midiendo los espaciamientos, de las líneas de corriente, normales a la dirección del flujo se puede establecer la distribución de velocidad dentro del flujo, y debido a que esta velocidad es igual al valor promedio para el ancho del canal, un aumento en el número de líneas de corriente hará que se incremente la presión en la estimación de la velocidad en un punto.

Vamos a enunciar algunas de las características de las configuraciones de flujo bidimensional que deben ser tomadas en consideración :

(1) Debido a que la línea de corriente es tangencial al vector velocidad en todos sus puntos, no tiene componente finita de velocidad normal con respecto a ese vector, esto significa que no puede existir flujo a través de una línea de corriente.

(2) Los espaciamientos entre líneas de corriente varían inversamente con la velocidad, o sea, espaciamientos más estrechos indican velocidades relativamente más altas. Si las líneas de corriente convergen en la dirección del flujo, esto significa un incremento en velocidad con respecto a la distancia, o sea, existe una aceleración convectiva.

(3) Las líneas de corriente no se cruzan, solo se intersectan en los puntos con velocidad teórica infinita y en puntos aislados de velocidad cero ( puntos de estagnación ).

(4) El punto de flujo donde la dirección de la línea de corriente de contorno cambia abruptamente, será un punto de estagnación si el ángulo medido dentro del flujo es menor que 180°, y será un punto de velocidad teórica infinita si el ángulo es mayor que 180°. En la Fig. 1.12, B es un punto de estagnación y C es un punto en el cual, la velocidad es teóricamente infinita.



Fig. 1.12 – Efectos sobre la velocidad por cambios abruptos en la alineación de los contornos. (Vallentine, H.R. 1967).

(5) En flujo permanente, la configuración de las líneas de corriente no cambian con el tiempo. En flujo inestable con superficie libre o con movimientos de contorno internos o externos, la trayectoria del flujo referida al origen estacionario cambia con el tiempo. En el caso de inestabilidades resultantes de una variación con el tiempo de la razón total de flujo entre contornos fijos y sólidos, la configuración general de la trayectoria no cambia, pero si cambia la razón de flujo en cada canal y la velocidad en cada punto.

(6) En cuerpos sólidos, los contornos estacionarios son líneas de corriente con la condición de que no ocurra separación de flujo en los contornos. En flujo permanente, los perfiles de superficie libre con variaciones graduales de flujo en canales abiertos son líneas de corriente, sin embargo, en trayectorias de flujo no permanente, tales como la trayectoria instantánea presentada a un observador estacionario del movimiento de un objeto sumergido a través de un fluido (Fig 1.13a), o por el paso de una ola de superficie (Fig. 1.13b), el contorno en movimiento de un sólido o de una superficie libre, no es una línea de corriente.

(7) Ciertos casos de trayectoria de flujo variable, resultantes del movimiento de un sólido o superficie libre a velocidad constante relativa, pueden ser transformadas en trayectorias de flujo permanente por superposición de una trayectoria de velocidad constante en la dirección opuesta a la del movimiento del contorno. En efecto, el contorno

es llevado a la condición de reposo con relación al observador por el movimiento del observador con la velocidad del contorno. Este procedimiento da lugar a una trayectoria de líneas de corriente completamente alteradas, y por eliminación de los efectos de las aceleraciones locales, el estudio de los movimientos de fluidos de las Fig. 1.13 y 1.14 se simplifican.



Fig 1.13. - Movimiento de un cuerpo a través de un fluido.
(a) Patrón inestable como si fuera grabado por una cámara estacionaria con un tiempo pequeño de exposición.
(b) Patrón estable como si fuera grabado por una cámara que se mueve con el cuerpo. (Lamb, H. 1945)

(8) La distinción entre líneas de corriente, líneas de trayectoria y líneas de movimiento o emisión es importante. Una línea de trayectoria es el camino seguido por una partícula fluida. Una línea de emisión es la que une las diferentes posiciones instantáneas de una sucesión de partículas emitidas desde una fuente o que pasan por un punto, y su forma varía con el tiempo, en flujo variable. En flujo permanente, las líneas de trayectoria y emisión coinciden. En flujo variable, la Fig. 1.15, muestra vistas instantáneas de una línea de emisión constante en un haz de humo en un tiempo  $t_1$ , y a un intervalo corto más tarde en un tiempo  $t_2$ . La acción de la variación de un viento lateral está representada por la línea de corriente instantánea  $W_1$  en  $t_1$  y  $W_2$  en  $t_2$ . Las partículas de humo se desplazan en el sentido a - b, que son líneas de trayectoria. La distinción entre estos términos es de particular importancia en el uso del tiempo de exposición de una fotografía para la determinación de las trayectorias del flujo en laboratorio.



Fig. 1.14. - Líneas de corriente de olas de superficie. (a) Patrón inestable. (b) Patrón estable. (Lamb, H. 1945).



Fig. 1.15. - Líneas de corriente, de trayectoria y de emisión o movimiento. (Vallentine, H.R. 1967).

#### 1.6 FLUJO ROTACIONAL E IRROTACIONAL

Una partícula de fluido que sigue una trayectoria recta o curva puede sufrir distorsión o rotación o ambas a la vez (Fig. 1.16). Si en una región fluida, ninguna de las partículas de un fluido sufre rotación se dice que existe irrotacionalidad en esa región.



Fig. 1.16. – Flujo a través de un conducto curvilíneo. (a) Distorsión sin Rotación. (b) Rotación sin Distorsión Apreciable. (Vallentine, H.R. 1967).

Debido a que la rotacionalidad e irrotacionalidad de un flujo ideal tienen su contrapartida aproximada en el comportamiento de un fluido real, y debido a que las características de las formas son distintas, es necesario considerar la distinción que existe desde el punto de vista matemático.

Se dice que una partícula tiene rotación cero en un plano, si la cantidad de velocidad angular de dos elementos lineales mutuamente perpendiculares de una partícula, es igual a cero. Por ejemplo, si una línea rota en sentido contrario a las agujas del reloj, a una razón igual que la rotación de otra línea en el sentido de las agujas del reloj, la partícula sufrirá una distorsión pero no rota.

En la Fig. 1.17 se presenta un elemento rectangular de un flujo bidimensional; las líneas punteadas indican el desplazamiento del elemento con relación al punto A en un período  $\delta t$ .



Fig. 1.17. - Definición de Rotación

La velocidad angular de AB con respecto al eje Z es :

$$lim\frac{\delta_{\cdot}\theta_{\cdot}}{\delta_{\cdot}t} = lim\frac{\frac{\partial_{\cdot}v}{\partial_{\cdot}x}\delta_{\cdot}x\delta_{\cdot}t}{\delta_{\cdot}x\delta_{\cdot}t} = \frac{\partial_{\cdot}v}{\partial_{\cdot}x} \quad ; \lim \delta t \to 0$$

y con respecto a AD es :

$$\lim \frac{\delta \cdot \theta_{\cdot 2}}{\delta \cdot t} = \lim \frac{-\frac{\partial \cdot u}{\partial \cdot y} \delta \cdot y \delta \cdot t}{\delta \cdot y \delta \cdot t} = -\frac{\partial \cdot u}{\partial \cdot y} \quad \text{; lim } \delta t \to 0$$

El promedio de las velocidades angulares de estos dos elementos de línea es conocido como rotación, y es igual a :

$$w = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial . v}{\partial . x} - \frac{\partial . u}{\partial . y} \right)$$

25

Cuando  $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$  en un punto o región, el flujo es rotacional y tiene vorticidad,  $\zeta$ , la cual es numéricamente igual a 2w, y está presente en ese mismo punto o región.

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

La condición para que un flujo bidimensional sea irrotacional es que la rotación y la vorticidad sea igual a cero, o sea :

$$\frac{\partial .v}{\partial .x} = \frac{\partial .u}{\partial .y}$$

En caso de un flujo tridimensional, la rotación existirá con respecto a cada uno de los tres ejes los mismos que son paralelos a los ejes x, y, z respectivamente, y por tanto habrán tres componentes posibles de rotación, wx, wy, wz y tres componentes correspondientes de vorticidad  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ .

$$w_{x} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial . w}{\partial . y} - \frac{\partial . v}{\partial . z} \right) = \frac{1}{2} \varepsilon$$
$$w_{y} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial . u}{\partial . z} - \frac{\partial . w}{\partial . x} \right) = \frac{1}{2} \eta$$
$$w_{z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial . v}{\partial . x} - \frac{\partial . u}{\partial . y} \right) = \frac{1}{2} \zeta$$

y la condición de irrotacionalidad será :

$$\frac{\partial . w}{\partial . y} = \frac{\partial . v}{\partial . z} \quad en \ sentido \ x$$
$$\frac{\partial . u}{\partial . z} = \frac{\partial . w}{\partial . x} \quad en \ sentido \ y$$
$$\frac{\partial . v}{\partial . x} = \frac{\partial . u}{\partial . y} \quad en \ sentido \ z$$

Capítulo I
Puede darse el caso de que existan puntos o líneas aisladas dentro del flujo irrotacional donde las condiciones anteriores no son satisfechas, tales puntos o líneas se conocen como "singularidades" y se caracterizan por tener velocidad cero o teóricamente infinita.

## Ejemplo :

Demuestre que el siguiente campo de velocidad, es un caso posible de flujo irrotacional de un fluido incompresible.

$$u = y z t$$
$$v = z x t$$
$$w = x y t$$

### Solución :

Las ecuaciones anteriores satisfacen la ecuación de la continuidad.

$$\frac{\partial \cdot u}{\partial \cdot x} = \frac{\partial \cdot v}{\partial \cdot y} = \frac{\partial \cdot w}{\partial \cdot z} = 0$$
$$\frac{\partial \cdot u}{\partial \cdot x} + \frac{\partial \cdot v}{\partial \cdot y} + \frac{\partial \cdot w}{\partial \cdot z} = 0$$

tal que

y por lo tanto el campo constituye un posible caso de flujo.

Las componentes de rotación son :

$$w_{x} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial . w}{\partial . y} - \frac{\partial . v}{\partial . z} \right) = \frac{1}{2} (x t - x t) = 0$$
$$w_{y} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial . u}{\partial . z} - \frac{\partial . w}{\partial . x} \right) = \frac{1}{2} (y t - y t) = 0$$

$$w_{z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} (z \cdot t - z \cdot t) = 0$$

y también será cero la vorticidad. Por lo tanto el campo representa un flujo irrotacional.

#### 1.7 FUNCIONES DE CORRIENTE

Es conveniente contar con algún medio para describir e identificar en forma concisa la configuración particular de un flujo determinado. Una adecuada descripción del flujo servirá para tener noción de la forma de sus límites, de la forma de las líneas de corriente, y la escala o magnitud del flujo o de las componentes de velocidad en uno o más puntos representativos. Así por ejemplo, se podrían tomar algunas líneas para obtener una descripción de la configuración de un flujo elemental a lo largo de una esquina, como el mostrado en la figura que sigue :



Fig. 1.18 – Flujo irrotacional en una esquina de 90°

La herramienta matemática que sirve para los propósitos de definir la configuración y características de un flujo en forma exacta, completa y concisa, se conoce como FUNCION DE CORRIENTE. Para cada configuración de flujo se puede encontrar una función de corriente que la defina, así, para flujo permanente bidimensional en el plano x y, la función de corriente ( $\psi$ ) es una función de las variables x, y;  $\psi = f(x,y)$  y tiene las siguientes propiedades :

(1) Cuando la función particular de un flujo es igualada a una constante se obtiene la ecuación general para las líneas de corriente de esa configuración, por tanto, cada constante define una línea de corriente.

(2) Cuando una función de corriente es diferenciada con respecto a y i a x, en ese orden, las ecuaciones para las componentes de velocidad u y v son obtenidas.

(3) En un modelo de flujo, la razón del volumen de flujo de izquierda a derecha entre dos líneas de corriente y = C1 y y = C2 es dy = dQ = C2 - C1.

(4) El efecto de combinar diferentes modelos de flujo puede ser fácilmente determinado. La función de corriente del modelo resultante es simplemente la suma de las funciones de corriente de los modelos componentes. Como un ejemplo, las características de la función de corriente para flujo: estable, bidimensional, irrotacional a un ángulo de 90° puede ser establecido tal como se muestra en la Fig. 1.18.

Para este modelo la función de corriente es :

$$\Psi = a x y$$

y la ecuación general para las líneas de corriente es  $\Psi$  = Constante, esto es, las líneas de corriente tienen forma de una hipérbola rectangular.

$$a x y = C$$

El coeficiente a determina la escala o magnitud del flujo y diferentes valores de C definen diferentes líneas de corriente.

Además, las componentes de velocidad,  $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}$  en un punto (x,y) están dadas por las siguientes derivadas parciales :

$$u = \frac{\partial \cdot \psi}{\partial \cdot y} = +ax$$
$$v = -\frac{\partial \cdot \psi}{\partial \cdot x} = -ay$$

#### Ejemplo :

Si a es igual a la unidad, la velocidad total y sus componentes en el punto P(3,4) de la figura anterior serán :

$$u = +x = 3$$
$$v = -y = -4$$
$$V = \sqrt{\left(u^2 + v^2\right)} = 5$$

29

Capítulo I

Fluidos Ideales

$$\theta = tg-1 (v / u) = tg-1 (-4/3) = -5306'$$

La razón de flujo entre dos líneas de corriente, digamos :

$$\psi 2 = xy = 10$$
$$\psi 3 = xy = 15$$

es igual a :

 $\delta Q = \delta \psi = \psi 3 - \psi 2$ = 15 - 10 = 5 pies3 / seg. por pie de profundidad normal al plano de

flujo.

Las características anteriores pueden establecerse definiendo una función de corriente que posea alguna de las características y posteriormente demostrando que posee las demás. Una función de corriente deberá tener la propiedad de poder ser diferenciada para obtener las componentes de la velocidad, por tanto, tendrá que ser definida como una función de xi y, y de t para el caso de flujo variable, de tal forma que cuando se diferencie con respecto a y se obtenga u, y cuando se diferencie con respecto a x se obtenga -v.

Entonces por definición, para todas las funciones de corriente, tendremos :

$$u = \frac{\partial \cdot \psi}{\partial \cdot y} \qquad \qquad v = -\frac{\partial \cdot \psi}{\partial \cdot x}$$

Si los valores de u y v son sustituidos en la ecuación :

$$u\,dy - v\,dx = 0$$

tendremos a lo largo de la línea de corriente :

$$\frac{\partial \cdot \psi}{\partial \cdot y} dy + \frac{\partial \cdot \psi}{\partial \cdot x} dx = 0$$

y la diferencial total será :

$$d\psi = u\frac{\partial \psi}{\partial x}dx + \frac{\partial \psi}{\partial y}dy = 0$$

de donde se deduce que :

$$\psi$$
 = Constante a lo largo de la línea de corriente.

En otras palabras, la ecuación general para las líneas de corriente en una configuración de un flujo, se obtiene igualando la ecuación de la función de corriente a una constante. Diferentes constantes definirán diferentes líneas de corriente. Esta es la primera de las consecuencias de la definición de  $\psi$ .



Fig. 1.19. – Significado físico de una línea de corriente en flujo bidimensional.

El significado físico de  $\psi$  se deriva de la consideración de la diferencia en los valores de  $\psi$  para dos líneas de corriente  $\psi_1$  y  $\psi_2$ , (Fig. 1.19 a), o sea :

$$d\psi = \psi_2 - \psi_1$$

Si la razón de flujo volumétrico de izquierda a derecha, a través de cualquier línea continua de longitud  $\delta l$  uniendo a dos líneas de corriente, es igual a  $\delta Q$ .

$$\delta Q = (uSen\phi - vCos\phi)\delta.l$$
$$\delta Q = \left(u\frac{\partial.y}{\partial.l} - v\frac{\partial.x}{\partial.l}\right)\delta.l$$
$$\delta Q = u\delta y - v\delta x$$
$$\delta Q = \frac{\partial.\psi}{\partial.y}\delta.y + \frac{\partial.\psi}{\partial.x}\delta.x$$

Capítulo I

$$\therefore \delta Q = \delta \cdot \psi = \psi_2 - \psi_1$$

Por tanto, de acuerdo con la última expresión, la razón de flujo entre un par de líneas de corriente en un flujo bidimensional es numéricamente igual a la diferencia en los valores de  $\psi$ . Si la línea de corriente pasa por el origen  $\psi=0$ , entonces, el flujo de izquierda a derecha, entre cualquier otras líneas de corriente y el origen, será igual al valor de  $\psi$  para esa línea de corriente, como se muestra en la Fig. 1.19 b, anterior. Este significado físico es la segunda consecuencia del método para definir  $\psi$ . Las características de  $\psi$  demostradas anteriormente se aplican a los flujos rotacional e irrotacional.

Para flujo irrotacional tenemos que :

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

y sustituyendo  $-\frac{\partial \psi}{\partial x}$  por v, y  $\frac{\partial \psi}{\partial y}$  por u, tendremos :

$$\frac{\partial^2 \cdot \psi}{\partial \cdot x^2} + \frac{\partial^2 \cdot \psi}{\partial \cdot y^2} = 0 \qquad (1.9)$$

La ecuación que tiene la forma :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0$$

es una ecuación bidimensional en coordenadas cartesianas y se la conoce como la ecuación de LAPLACE. Esta ecuación para un sistema tridimensional será :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = 0$$

 $F \rightarrow Superficie de contorno$ 

Y la forma general en notación vectorial será :

$$\nabla^2 F = 0$$

La Ecuación de Laplace esta presente en otros campos de las ciencias físicas, como por ejemplo en electrostática, así como en hidrodinámica.

Es evidente que solo ciertas funciones de x, y, satisfacen a (Ec. 1.9). El razonamiento anterior indica que  $\psi$  satisface todas las configuraciones de flujos irrotacionales bidimensionales, o sea, son soluciones de Laplace. Debido a que existe una infinita variedad de posibles condiciones de contorno y por tanto de flujos irrotacionales, existe también un infinito número de funciones que tienen características comunes de ser soluciones de Laplace. Los valores de  $\psi$  varían de un punto a otro en un flujo y la ecuación de Laplace regula las limitaciones de cómo pueden variar las formas.

### Ejemplo :

Determine la función de corriente para un flujo paralelo con velocidad V, inclinado un ángulo a con respecto al eje x.



Fig. 1.20. – Flujo paralelo inclinado a un ángulo  $\alpha$  con respecto al eje x.

### Solución :

1. Por definición :

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = u = V \cos \alpha$$

$$\psi = Vy \cos \alpha + f_1(x)$$

también tenemos que :

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = -v = -Vsen\alpha$$

entonces :

también tenemos que :

 $\frac{\partial \psi}{\partial y} = -v = -Vsen\alpha$  $\psi = -Vx sen \alpha + f_2(y)$  $\psi = Vy \cos \alpha - Vx sen \alpha + A$ donde A = constante

Si el valor de  $\psi$  para la línea de corriente pasa por el origen es cero, entonces: A = 0 y tenemos la ecuación de la función de corriente:

$$\psi = V (y \cos \alpha - x \sin \alpha) = uy - vx$$

La ecuación de la línea de corriente es :

o sea :

 $V(y \cos \alpha - x \sin \alpha) = C$  $y = x \tan \alpha + C / V \cos \alpha$ 

La última ecuación corresponde a la ecuación de la línea recta en su forma estándar :

y = mx + b

2. Para el flujo paralelo al eje x tenemos que :

$$\alpha = 0$$
$$\psi = Vy$$
$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = V$$
$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$$

y el flujo de izquierda a derecha entre el origen y cualquier línea de corriente  $\psi_1$  situada en el punto  $\mathbf{y} = \mathbf{y}_1$  es igual a :

$$Q = \psi_l = V y_l$$

Capítulo I

 $\psi = C$ 

#### 1.8 FUNCIONES DE POTENCIAL DE VELOCIDAD

La función de corriente para un flujo bidimensional cuando se iguala a una secuencia de constantes, generará las ecuaciones de las líneas de corriente de la trayectoria del flujo.

Existe una función complementaria de similar naturaleza y aplicable solo para flujo irrotacional, es la Función de Potencial de Velocidad,  $\phi$ , la cual también es función de (x,y) y de t. Cuando se iguala la función a cada uno de los miembros de una secuencia de constantes se genera las ecuaciones de una familia de líneas de potencial de velocidad, cada una de las cuales cruza a las líneas de corriente a ángulos rectos, de esta forma las líneas de corriente y las líneas de potencial forman una malla cuyas intersecciones forman un ángulo recto.

La diferencia importante entre  $\phi$  y  $\psi$  radica en que las funciones  $\phi$  existen solamente para flujos irrotacionales.

La función de potencial de velocidad es definida como una función de (x,y) y de t tal, que cuando es diferenciada con respecto a la distancia en cualquier dirección particular se obtiene la velocidad en esa dirección. Entonces para cualquier dirección s en la cual la velocidad es  $v_s$ , tendremos :

$$\frac{\partial \phi}{\partial s} = Vs$$

y el potencial de velocidad  $\phi$  se incrementa en la dirección del flujo. Para las direcciones x, y tendremos:

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

$$v = \frac{\partial \phi}{\partial y}$$
(1.10)

Podemos observar :

(1). Como consecuencia de esta definición, las líneas de  $\phi$  constante pueden ser graficadas perpendiculares a las líneas de valor  $\psi$  constante en todos los puntos, o sea que las líneas  $\phi$  interceptan en ángulo normal a las líneas  $\psi$ . En un instante particular,  $\phi$  es una función solamente de (x,y), aún cuando sobre un intervalo de tiempo esta varíe también con t en un flujo variable.

En cualquier instante  $\phi$  es constante a lo largo de la línea  $\phi$ .

٠

Capítulo I

$$\therefore \quad d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy = 0$$

Sustituyendo en esta ecuación los valores anteriores de (1.10) tenemos :



Fig. 1.21. – Líneas de corriente y líneas equipotenciales. (Vallentine, H.R. 1967).

En la última ecuación se observa que la pendiente de la línea  $\phi$  en cualquier punto es igual al valor recíproco negativo de la pendiente (v/u) de la línea  $\psi$  en este punto, esto significa que la línea de valores  $\phi$  constantes intercepta a la línea de corriente en un punto formando un ángulo recto.

(2). La segunda consecuencia de la definición de  $\phi$  resulta de sustituir los valores de **u** y **v** en la ecuación de la continuidad,  $\frac{\partial .u}{\partial .x} + \frac{\partial .v}{\partial .y} = 0$ , o sea :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$

con lo cual se demuestra que la función  $\phi$ , al igual que la función  $\psi$  para flujo irrotacional, es solución de la ecuación de Laplace.

(3). Finalmente, sustituyendo los valores de u y v en la ecuación de flujo irrotacional

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad tenemos:$$

Capítulo I

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \tag{1.11}$$

lo cual significa que  $\phi$  satisface las condiciones para flujo irrotacional, o en otras palabras, la existencia del potencial de velocidad implica que el flujo es irrotacional. Esto puede demostrarse a la inversa, o sea, que la condición de irrotacionalidad implica la existencia de un potencial de velocidad. En otras palabras las funciones de corriente no están restringidas al flujo irrotacional.

(4). La interrelación de  $\phi$  y  $\psi$ , y de las componentes de velocidad **u** y **v** en un punto (**x**,**y**) del sistema de coordenadas cartesianas pueden resumirse en las siguientes dos ecuaciones :

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

$$(1.12)$$

$$v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Analicemos las últimas ecuaciones :

Si v = 0

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \qquad ; \phi \text{ solo depende de } x$$

 $\phi = f(x)$ 



Fig. 1.22. – Relación entre funciones de corriente y velocidad en un flujo bidimensional, en coordenadas polares. (Vallentine, H.R. 1967).

Capitulo I

Fluidos Ideales

también :

 $\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$  ;  $\psi$  solo depende de y

 $\psi = f(y)$ 

de tal forma que:

$$u = \frac{d\phi}{dx} = \frac{d\psi}{dy} = 0$$

En muchos casos es más conveniente trabajar con coordenadas polares ( r,  $\theta$ ) en lugar de las coordenadas (x, y).

En la (Fig. 1.22) se ve que para cualquier punto C ( $\mathbf{r}, \boldsymbol{\theta}$ ):

$$x = r \cos \theta$$
;  $y = r \sin \theta$ ;  $r = \sqrt{(x^2 + y^2)}$ ;  $\theta = tag^{-1}\frac{y}{x}$ 

Si la función de corriente tiene los valores:

 $\psi_{A} \quad en \quad A(r - \frac{1}{2} \delta r, \theta - \frac{1}{2} \delta \theta)$  $\psi_{B} \quad en \quad B(r + \frac{1}{2} \delta r, \theta + \frac{1}{2} \delta \theta)$ 

la diferencia en los valores de  $\psi$  será :

$$d\psi = \psi_B - \psi_A$$

que corresponde a la razón de flujo de izquierda a derecha a lo largo de la línea **AB**, en virtud de la definición de  $\psi$ . Esta razón de flujo puede ser considerada como la razón total de los dos flujos, correspondiendo el uno a la dirección radial con velocidad  $\mathbf{v}_r$  y el otro a la dirección tangencial o circunferencial en sentido de la agujas del reloj con velocidad  $-\mathbf{v}_{\theta}$ .

La razón del flujo radial es igual a :

(velocidad radial) x (ancho DE) = 
$$v_r d(r\theta) = v_r r d\theta$$

y la razón de flujo tangencial es igual a :

(velocidad tangencial) x (ancho FB) = -  $v_{\theta} dr$ 

de donde:

$$d\psi = u \, dy - v \, dx = 0$$
$$d\psi = v_r \, r \, d\theta - v_\theta dr \qquad (1.13)$$

En cualquier instante  $\psi = \mathbf{f}(\mathbf{r}, \theta)$  entonces :

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial (r\theta)} d(r\theta) + \frac{\partial \psi}{\partial r} dr$$
$$= \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} r d\theta + \frac{\partial \psi}{\partial r} dr \quad (1.14)$$

1.12

Comparando las ecuaciones (1.13) y (1.14) tenemos que :

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}$$
;  $v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r}$  (1.15)

Para la función Potencial por definición de  $\phi$  tenemos que :

$$v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r}$$

$$v_{\theta} = \frac{\partial \phi}{\partial (r\theta)} = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta}$$

Las ecuaciones en coordenadas polares correspondientes a la ecuación (1.12) serán :

$$v_{r} = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \qquad u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

$$v_{\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -\frac{\partial \psi}{\partial r} \qquad v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$
(1.16)

La equivalencia de las coordenadas cartesianas y polares, incluyendo los signos pueden verse para cualquier punto G sobre el eje x, y serán las siguientes :

$$dx = dr$$
$$dy = r d\theta$$
$$u = v_r$$
$$v = v_{\theta}$$

# Ejemplo :

Dada la función  $\psi = xy$  determinar la configuración del flujo. Demostrar que el flujo es irrotacional y determinar la función  $\phi$ .

### Solución :

La ecuación de la línea de corriente es :

o también : xy = C

Esta ecuación representa una familia de hipérbolas rectangulares. Consideremos solamente el primer cuadrante y la configuración respectiva representará un flujo en una esquina a 90°. La configuración del primero y segundo cuadrantes juntos representarán un flujo alrededor de una placa plana o una estagnación del flujo, según muestra la (Fig. 1.23)

 $\psi = C$ 



Fig. 1.23 – Flujo a través de una placa plana

Para que el flujo sea irrotacional debe cumplirse que :

$$w = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0$$
 y que  $\left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) = 0$ 

# Capitulo I

tenemos que :

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial (xy)}{\partial y} = x \qquad \qquad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\partial (xy)}{\partial x} = -y$$

por tanto :

$$w = \frac{1}{2}(0 - 0) = 0$$
 y el flujo es irrotacional

Si: 
$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

Sustituyendo,  $-\frac{\partial \psi}{\partial x}$  por **v**, y  $\frac{\partial \psi}{\partial y}$  por **u** tendremos :  $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0$ 

por tanto, el flujo es irrotacional y existirá la función \$\$\overline{\phi}\$.

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = x$$
$$\therefore \phi = \frac{1}{2}x^2 + f_1(y) \quad (1.17)$$

También :

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -y$$
  
$$\therefore \phi = -\frac{1}{2}y^2 + f_2(x) \qquad (1.18)$$

entonces, la ecuación de las Líneas de Potencial de velocidad será igual a :

$$\phi = \frac{1}{2}(x_2 - y_2) + A$$

la cual satisface a (1.17) y (1.18).

41

Las líneas  $\phi$  = constante se plotean como una familia de hipérbolas rectangulares ortogonales a las líneas  $\psi$  = constante.

## Ejemplo:

- Demostrar que la función de corriente de un flujo irrotacional bidimensional.

$$\psi = U\left(r - \frac{a^2}{r}\right) sen\theta$$

representa la configuración de un flujo permanente en la dirección x que atraviesa a un cilindro de radio a, en una región fluida infinita con velocidad permanente U.

- Determinar la función potencial y encontrar la distribución de velocidad sobre el contorno del cilindro.

### Solución :

a) Configuración.

Para la línea de corriente  $\psi = 0$   $\theta = 0$  o  $\pi$ esto significa que la línea de corriente coincide con el eje x.

Para r = a

significa, que la línea de corriente es un círculo de radio a con su centro en el origen. Fig. 1.24.

Capítulo I

b) Función Potencial.

 $\phi$  se encuentra integrando las funciones de velocidad, determinadas a partir de las funciones  $\psi.$ 

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}$$
$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \left[ U(r - a^2 / r) \right]}{\partial \theta} sen\theta$$
$$v_r = \frac{1}{r} \left[ U(r - a^2 / r) \right] \cos\theta$$
$$v_r = U(1 - a^2 / r^2) \cos\theta$$
$$\partial \phi = \left[ U(1 - a^2 / r^2) \right] \cos\theta \cdot \partial r$$
$$\phi = U\left[ \left( r - a^2 / r \right) \right] \cos\theta + f_1(\theta)$$

También tenemos que :

$$\frac{1}{r} \left( \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) = v_{\theta} = -\frac{\partial \psi}{\partial r}$$

$$v_{\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left[ U(r - a^2 / r) sen\theta \right]$$

$$v_{\theta} = -U \left( 1 + \frac{a^2}{r^2} \right) sen\theta$$

$$\frac{1}{r} \partial \phi = \left[ -U \left( 1 + \frac{a^2}{r^2} \right) sen\theta \right] \partial \theta$$

$$\frac{1}{r} \phi = U \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \right) cos\theta$$

$$\phi = U \left[ \left( r - \frac{a^2}{r} \right) \right] cos\theta + f_2(r)$$

43

Capítulo I



Fig. 1.24. - Flujo irrotacional. (Marine Hydrodynamics, 1999).

Comparando los dos valores de \$\phi\$ tenemos que la función potencial requerida es igual a :

 $\phi = U(r + a^2/r)\cos\theta + C$ ; C, no afecta a la configuración del flujo

c) Distribución de Velocidad.

Las componentes de velocidad  $\mathbf{v}_r$ ,  $\mathbf{v}_{\theta}$  para cualquier punto en el flujo han sido determinadas anteriormente. Para distancias muy lejanas con respecto al cilindro, la relación  $\frac{a}{r}$  se aproxima a cero y.

$$v_r \to U \cos \theta$$
  
 $v_\theta \to -U \sin \theta$   
∴  $V = \sqrt{(v_r^2 + v_\theta^2)} \to U$ 

En los límites del cilindro, que también es una línea de corriente tenemos :

$$v_r = 0$$
  $r = a$   
 $\therefore v_a = -2Usen\theta$ 

el signo negativo resulta de la convención adoptada para  $\theta$ ,  $V_{\theta}$ .

Llamando V' a la velocidad en el contorno del cilindro tenemos :

V'= 
$$-v_{\theta}$$
 para  $0 < \theta < \pi$ 

 $\therefore$  V' = 2Usen $\theta$ 

V'min = 0 en  $\theta = 0$ ,  $\pi$  puntos de estagnación

V'máx = 2U en  $\theta = \frac{1}{2} \pi$ 

## 1.9 ECUACIÓN DE EULER PARA FLUIDO NO VISCOSO

Según Euler el movimiento de un fluido puede ser tratado matemáticamente utilizando dos aproximaciones. La primera aproximación, conocida como aproximación de Lagrange, tiene que ver con las posiciones, velocidades y aceleraciones de partículas individuales, con coordenadas x, y, z, las cuales son función de la posición inicial de la partícula y del tiempo. La segunda aproximación o aproximación de Euler, adoptado en el presente texto, considera que los valores de x, y, z definen un punto general en el espacio y no varían con el tiempo. En este método se asume que las velocidades y aceleraciones de las partículas pasan por ese punto en lugar de que las variaciones de velocidades y aceleraciones de las partículas sigan sus propias trayectorias.

Si u, v, w son las componentes de velocidad en las direcciones x, y, z del punto (x, y, z) en un tiempo t, entonces u, v, w, son funciones de la posición (x, y, z) y del tiempo t. Así, para un valor particular de t, los valores de u, v, w definen el movimiento para todos los puntos en el fluido; y para un punto (x, y, z), los valores de u, v, w, son simples funciones del tiempo y proveen una historia de las variaciones de velocidad en el punto considerado. Excepto cuando se diga lo contrario, se asume que u, v, w, son funciones finitas y continuas de x, y, z, y sus derivadas en el espacio,  $\partial u/\partial x$ ,  $\partial v/\partial y$ ,  $\partial w/\partial z$  son también finitas. Se tiene que tomar en cuenta las componentes de aceleración en el punto y entonces la segunda ley del movimiento de Newton incorporando estas componentes es aplicada a la masa fluida.

Una partícula ubicada en el punto (x, y, z) en un instante t, se moverá en el tiempo  $\partial t$  una distancia:

 $\partial x = u\partial t$  en la dirección x  $\partial y = v\partial t$  en la dirección y  $\partial z = w\partial t$  en la dirección z

El cambio,  $\partial \mathbf{u}$ , en la componente de velocidad  $\mathbf{u}$  de la partícula será igual a la suma total de los cambios conveccionales debido a las variaciones de posición  $\partial \mathbf{x}$ ,  $\partial \mathbf{y}$ ,  $\partial \mathbf{z}$ , y al cambio local debido al paso del tiempo  $\partial \mathbf{t}$ , en el punto ( $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ ). Matemáticamente tendremos:

$$u = f_1(x, y, z, t)$$

$$\delta u = \frac{\partial u}{\partial t} \,\delta t + \frac{\partial u}{\partial x} \,\delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \,\delta y + \frac{\partial u}{\partial x} \,\delta x + \frac{\partial u}{\partial z} \,\delta z$$

$$\therefore \frac{\delta u}{\delta t} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\delta x}{\delta t} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\delta y}{\delta t} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\delta z}{\delta t}$$

Si hacemos que  $\delta t$  se aproxime a cero, la aceleración total en la dirección x será :

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}$$

en forma similar las aceleraciones totales en las direcciones y, z serán :

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}$$

En estas ecuaciones los términos del primer miembro son conocidos como aceleraciones locales debido a que se originan por cambios de velocidad con el tiempo en el punto (x, y, z); los términos del segundo miembro son conocidos como aceleraciones conveccionales debido a que se originan por cambios de velocidad con el cambio de posición.



Fig. 1.25. – Aceleración. Componente conveccional del cambio en velocidad en dirección x de una partícula fluida que se mueve de  $P_1$  a  $P_2$ . Componente local  $\frac{\partial u}{\partial t} \delta t$ . (Applied Hydrodynamics, 1967).

En régimen de flujo constante, en el cual las velocidades y aceleraciones no varían con el tiempo, la aceleración local es igual a cero, pero, las partículas fluidas tendrán aceleraciones convectivas si el flujo no es uniforme, como es el caso de flujos en pasajes convergentes. En flujo uniforme, en el cual las velocidades y aceleraciones no varían con la posición, la aceleración convectiva es cero, pero, las partículas fluidas poseerán aceleración local si el flujo no es permanente, como es el caso de un flujo con incremento en la descarga.

Aplicando la segunda ley del movimiento de Newton en un campo tridimensional, se obtienen las ecuaciones de Euler para el movimiento de un fluido no viscoso.

Sea p la presión y  $\rho$  la densidad en el punto P (x, y, z) del elemento con dimensiones  $\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $\delta z$  mostrado en la (Fig. 1.25). Sean X, Y, Z las componentes de la fuerza de cuerpo por unidad de masa en la dirección x, y, z en un instante t. Debido a que la fuerza por unidad de masa es dimensionalmente una aceleración, y debido a que la única fuerza de cuerpo es la fuerza de peso del cuerpo, se pueden considerar a X, Y, Z como componentes de la fuerza de gravedad g. El producto de la masa del elemento por su aceleración total en la dirección x, deberá ser igual a la suma de las componentes de la fuerza actuando sobre el elemento en esa dirección, entonces :

Capítulo I

$$\rho \delta x \, \delta y \, \delta z \, \frac{du}{dt} = \rho \delta x \, \delta y \, \delta z \, X + \left( p - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial x}{2} \right) \delta y \, \delta z - \left( p - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial x}{2} \right) \delta y \, \delta z$$
$$\therefore \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$$

y en forma similar :

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} = Y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}$$
$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} = Z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}$$

que son las ECUACIONES DE EULER para el movimiento de fluidos no viscosos.



Fig. 1.26. - Ecuación de movimiento. Fuerza actuante en la dirección x sobre un elemento fluido tridimensional en un flujo no viscoso. (Applied Hydrodynamics, 1967).

Cada término de las ecuaciones anteriores tienen las dimensiones de fuerza por unidad de masa, o aceleración, y la aceleración total en una dirección dada es igual a la suma de la componente gravitacional y de la componente debido a la existencia del gradiente de presión en esa dirección.

Integrando estas ecuaciones entre dos puntos (x1, y1, z1) y (x2, y2, z2) obtendremos los términos (fuerza por unidad de masa) x (distancia) que representan cambios de energía, que podría ser causada por el movimiento de masas de fluido unitarias desde un punto a otro. Este resultado de la integración será valido siempre que el flujo sea irrotacional, y las ecuaciones resultantes constituyan lo que se conoce como ecuación de Bernoulli.

# 1.10 ECUACIÓN DE BERNOULLI

En las ecuaciones de Euler las componentes X, Y, Z de la fuerza de gravedad pueden expresarse en términos de una "fuerza potencial de gravedad". Este artificio matemático es análogo a la velocidad potencial y es función de x, y, z de tal forma que cuando se diferencia con respecto a la distancia en cualquier dirección, se obtiene una componente negativa de la fuerza de gravedad por unidad de masa en esa dirección.

Si la dirección vertical hacia arriba, o sea, en dirección opuesta a la gravedad, es representada por el eje  $\mathbf{h}$ , entonces la energía potencial o fuerza potencial, con respecto a algún nivel seleccionado, por unidad de masa a una altura  $\mathbf{h}$  sobre el datum es igual a :

$$\Omega = +gh$$

La fuerza por unidad de masa en la dirección h positiva es igual a la derivada negativa con respecto a h de la fuerza potencial.

$$\frac{\partial Q}{\partial h} = -g$$

En forma similar las fuerzas por unidad de masa X, Y, Z en las direcciones x, y, z son iguales a :

$$X = -\frac{\partial Q}{\partial x};$$
  $Y = -\frac{\partial Q}{\partial y};$   $Z = -\frac{\partial Q}{\partial z}$ 

también :

$$u = -\frac{\partial \phi}{\partial x};$$
  $v = -\frac{\partial \phi}{\partial y};$   $w = -\frac{\partial \phi}{\partial z}$ 

49

Capítulo I

Sustituyendo estas relaciones y las ecuaciones

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial z}; \qquad \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x}; \qquad \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}$$

en la Ecuación de Euler obtenemos :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{\partial \Omega}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x}$$
$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial t} + u \frac{\partial u}{\partial y} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{\partial \Omega}{\partial y} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial y}$$
$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial t} + u \frac{\partial u}{\partial z} + v \frac{\partial v}{\partial z} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial \Omega}{\partial z} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial z}$$

Si consideramos  $\rho$  constante, e integramos con respecto a x, y, z, obtenemos las ecuaciones :

$$\frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) + \frac{\partial\phi}{\partial t} + \Omega + \frac{p}{\rho} = F_1(y, z, t)$$
$$\frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) + \frac{\partial\phi}{\partial t} + \Omega + \frac{p}{\rho} = F_2(z, x, t)$$
$$\frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) + \frac{\partial\phi}{\partial t} + \Omega + \frac{p}{\rho} = F_3(x, y, t)$$

Los miembros de la izquierda de estas ecuaciones son idénticas e igual a  $\frac{1}{2} V^2$ , donde V es la velocidad cuyas componentes son u, v, w. El segundo miembro al no contener a x, y, z son independientes de ellas, y son funciones del tiempo o constantes. Para las tres ecuaciones idénticas podemos escribir una sola ecuación y quedaría :

$$\frac{1}{2}V^2 + \frac{\partial\phi}{\partial t} + \Omega + \frac{p}{\rho} = F(t)$$

la cual es la ECUACIÓN DE BERNOULLI para flujo irrotacional no constante, no viscoso e incompresible.

Para flujo permanente, t desaparece, y sustituyendo  $\Omega$  por **gh**, la ecuación de Bernoulli para flujo permanente o constante e irrotacional, es la siguiente :

$$\frac{1}{2}V^2 + \frac{p}{\rho} + gh = C$$
 ó  $\frac{1}{2}\frac{V^2}{g} + \frac{p}{\gamma} + h = H$ 

donde H es una constante a través de la región de flujo irrotacional.

Si consideramos el movimiento de una partícula a lo largo de su línea de corriente en flujo permanente, se obtiene la forma simple de la ecuación de Euler la cual puede ser integrada a lo largo de la línea de corriente sin el requerimiento de irrotacionalidad. Así, si s es la distancia medida a lo largo de la línea de corriente, V es la velocidad de una partícula en el tiempo t, y S es la componente de la gravedad en la dirección instantánea del movimiento, entonces :

$$V = f(s, t)$$
$$\delta V = \frac{\partial V}{\partial t} \delta t + \frac{\partial V}{\partial s} \delta s$$
$$\frac{\delta V}{\delta t} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial s} \frac{\delta s}{\delta t}$$
$$\therefore \frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial s}$$

y aplicando la segunda ley de Newton, tenemos :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial s} = S - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s}$$
(1.19)

En los puntos donde la línea de corriente es curva, la partícula experimentará un gradiente de presión y una aceleración normal a la dirección del movimiento.

Si la dirección normal hacia el plano de curvatura es representada por n, y si la componente de la gravedad en esta dirección es N, la aceleración total será igual a la  $\left(\frac{V^2}{v}\right)$ . aceleración local  $\left(\frac{\partial V_n}{\partial t}\right)$ , más la aceleración convectiva (aceleración centrípeta)

La ecuación de movimiento para la dirección n será :

$$\frac{\partial V_n}{\partial t} + \frac{V^2}{r} = N - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n}$$



Fig. 1.27 - Ecuación de movimiento. Fuerzas actuando en la dirección de movimiento en un elemento de fluido en tres dimensiones no viscoso. (Vallentine, H.R., 1967)

la cual establece la variación de la presión con el radio en flujos curvos.

La integración de la ecuación (1.23) con respecto a s, distancia a lo largo de la línea de corriente, es posible en flujo permanente cuando la trayectoria es una línea de corriente y  $\frac{\partial V}{\partial t}$  es cero.

Sustituyendo  $-\frac{\partial \Omega}{\partial s}$  por **S** se tiene :

$$V\frac{\partial V}{\partial s} + \frac{\partial \Omega}{\partial s} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s} = 0$$

e integrando con respecto a s, sin la restricción de que el flujo tiene que ser irrotacional, resulta en las ecuaciones :

$$\frac{1}{2}V^2 + gh + \frac{p}{\rho} = C'$$
 ó  $\frac{1}{2}\frac{V^2}{g} + \frac{p}{\gamma} + h = H'$ 

la cual corresponde a la forma restringida de la Ecuación de Bernoulli para los puntos sobre cualquier línea de corriente en flujo permanente, de fluido no viscoso incompresible.

Los términos de la Ecuación de Bernoulli  $\frac{1}{2} V^2/g$ ,  $p/\gamma$ , h, tienen dimensión de energía por unidad de peso del fluido, por ejemplo, libras pie por libras peso, o simplemente pies. En efecto,  $\frac{1}{2} V^2/g$  es la energía cinética por libra y h es la energía potencial gravitacional por libra referida al mismo datum. El término presión  $p/\gamma$  no representa, en si mismo, una energía de presión por unidad de peso del fluido (el fluido bajo consideración al ser incompresible, no involucra el concepto de resistencia-energía debido a la compresión); sin embargo la diferencia  $p_B/\gamma - p_A/\gamma$  expresada en la Ecuación de Bernoulli de la forma :

$$\frac{1}{2}\frac{V_{A}^{2}}{g} + \frac{p_{A}}{\gamma} + h_{A} = \frac{1}{2}\frac{V_{B}^{2}}{g} + \frac{p_{B}}{\gamma} + h_{B}$$

representa la ENERGÍA entregada por las fuerzas de presión en movimiento, por unidad de peso del fluido, desde el punto A hasta el punto B.

## 1.11 DISTRIBUCIONES DE PRESIÓN Y VELOCIDAD

Las distribuciones de velocidad pueden ser representadas por medio de una serie de flechas cuyas longitudes representan la velocidad en el punto donde son graficadas. Las longitudes de las flechas y las ordenadas de las curvas pueden indicar velocidades absolutas, o velocidades relativas con respecto a una velocidad de referencia seleccionada en una región de flujo uniforme (Fig. 1.11, y Fig. 1.12). El uso de velocidades relativas sirven para representar diagramas de velocidad adimensional aplicables a varias razones de flujo y a varias escalas de magnitud.

Las distribuciones de presión en flujo permanente irrotacional se determinan a partir de las distribuciones de velocidad aplicando la Ecuación de Bernoulli :

$$\frac{1}{2}\frac{V^2}{g} + \frac{p}{\gamma} + Z = \frac{1}{2}\frac{V_0^2}{g} + \frac{p_0}{\gamma} + Z_0 = H$$

donde Z = es el término elevación.H = constante en un región de flujo irrotacional

- Los tres primeros términos se refieren a cualquier punto del flujo

- Los términos con subscriptos se refieren a un punto de referencia arbitrario.

Para un flujo sobre un plano horizontal donde no existe efectos de la fuerza de gravedad, el termino Z desaparece. Si multiplicamos por  $\gamma$  a la expresión anterior obtendremos la relación presión-velocidad :

Debido a que  $V/V_0 = b_0 / b$ , la relación de espaciamiento de las líneas de corriente pueden ser determinadas a partir de la configuración del flujo, y la ecuación (1.23) hace posible determinar la presión en cualquier punto en términos de las cantidades de referencia  $p_0, V_0$ .

La (Ec.1.24) encierra una relación adimensional que puede ser ploteada sustituyendo  $(V/V_0)^2$  de la unidad la cual es independiente de la extensión del flujo y de las magnitudes absolutas de presiones y velocidades.

Para un punto de estagnación V=0, entonces :

$$\frac{\Delta p}{\frac{1}{2}\rho V_0^2} = 1$$

y la presión de estagnación es igual a :

$$p_{st} = p_0 + \frac{1}{2} \rho V_0^2$$

# Ejemplo:

La velocidad en el contorno de un cilindro sumergido en un fluido esta dado por

 $V' = 2Usen\theta$ 

donde U : velocidad no disturbada del fluido

 $\theta$  : se mide en la dirección del flujo

Si la presión en el flujo es  $p_0$ , determinar :

1. Distribución de presión alrededor del cilindro

- 2. Localización de los puntos de estagnación
- 3. Presión de estagnación

# Solución:

1. La presión p en cualquier punto del contorno esta dado por :

$$\frac{(p-p_0)}{\frac{V}{2}\rho U^2} = 1 - \left(\frac{V}{U}\right)^2 = 1 - 4sen^2\theta$$

entonces :

$$p = p_0 + \frac{1}{2}\rho U^2 \left(1 - 4sen^2\theta\right)$$

La distribución se plotea adimensionalmente en términos de  $\frac{(p-p_0)}{\frac{1}{2}\rho U^2}$  y se muestra en la

siguiente figura :



Fig. 1.28 – Flujo irrotacional a través de un cilindro. Distribución de presión sobre el cilindro.

2. De la ecuación

$$\frac{(p-p_0)}{\frac{1}{2}\rho U^2} = 1 - \left(\frac{V'}{U}\right)^2 = 1 - 4sen^2\theta$$

se observa que los puntos de estagnación, cuando V'=0, están ubicados en :

$$\theta = 0$$
 y  $\theta = \Pi$ 

y en estos puntos :

$$\frac{\left(p-p_{0}\right)}{\frac{1}{2}\rho U^{2}}=1$$

Los puntos sobre el contorno donde la presión es la misma que la del flujo no disturbado se los obtiene haciendo :

 $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0$ 

entonces :

$$1 - 4sen^2\theta = 0$$
 entonces  $sen\theta = \pm \frac{1}{2}$ 

Capítulo I

$$y \qquad \theta = 30^\circ, 150^\circ, 210^\circ, 330^\circ$$

La presión mínima ocurre cuando

$$1 - 4sen^2\theta = min$$

O sea, cuando  $\theta = 90^{\circ} \text{ y } 270^{\circ} \text{ y en estos puntos se obtiene que :}$ 

$$\frac{(p-p_0)}{\frac{1}{2}\rho U^2} = -3$$

En la Fig. 1.29 se muestra las distribuciones de presión a lo largo del contorno y el eje central de una contracción bidimensional en un plano horizontal. Son de interés la localización de los puntos de presión máxima en los puntos de estagnación S, y de mínima presión en X sobre el contorno curvo exterior de la región de presión baja uniforme y alta velocidad. Las componentes x, y del empuje sobre la porción curva del contorno pueden determinarse a partir de las áreas de los diagramas de presión en los cuales las magnitudes de presión son ploteadas sobre las proyecciones respectivas del contorno curvo.



Fig. 1.29. - Distribución de presión a lo largo del contorno y en la línea central de una contracción de flujo bidimensional. (Vallentine, H.R. 1967).

El empuje total obtenido de tales curvas de distribución de presión puede ser comprobado aplicando la ecuación impulso-movimiento en análisis unidimensional.

Si los efectos de gravedad están presentes, como en el caso de flujo en un plano vertical, el termino elevación Z de Bernoulli debe ser tomado en cuenta. Si el flujo es cerrado y no tiene superficie libre, es conveniente combinar los términos presión y elevación para obtener el cabezal piezométrico **h**, donde :

$$h = \frac{p}{\gamma} + Z$$

El cabezal piezométrico en un punto en un flujo, es la altura sobre el datum a la cual un fluido podría elevarse en un tubo de presión abierto o piezómetro, insertado en ese punto. (Fig.1.30).



Fig. 1.30. – Variación de velocidad y del cabezal piezométrico en un flujo con contracción bidimensional. (Vallentine, H.R. 1967).

Sustituyendo h en la ecuación de Bernoulli, tenemos :

$$\frac{1}{2}\frac{V^2}{g} + h = \frac{1}{2}\frac{V_0^2}{g} + h_0$$
$$\frac{h - h_0}{V_0^2/2g} \quad \circ \quad \frac{\Delta h}{V_0^2/2g} = 1 - \left(\frac{V}{V_0}\right)^2$$

Comparando las ecuaciones (1.23) y (1.24) veremos que la curva de distribución de presión adimensional para un flujo en un plano horizontal, podría igualmente servir como la curva de distribución piezómetrica para flujo con condiciones de contorno similares en un plano vertical. La configuración de flujo en los dos casos es determinada únicamente por la forma del contorno, y el efecto que causa la gravedad es incrementar linealmente la presión en sentido vertical hacia abajo.

# 1.12 CONSIDERACIONES SOBRE ENERGÍA

(a) Ecuación de Energía para Fluidos no Viscosos

En un punto de un flujo donde la velocidad es V, la energía cinética de un elemento del fluido de dimensiones dx, dy, dz, es igual a la mitad del producto de la masa por el cuadrado de la velocidad.

$$\delta T = \frac{1}{2} \rho V^2 \delta x \, \delta y \, \delta z$$

la ENERGÍA CINÉTICA total en el fluido será :

$$T = \frac{1}{2} \iiint \rho V^2 \delta x \, \delta y \, \delta z$$

Si la energía potencial por unidad de masa en un punto del fluido es :

$$\Omega = gh$$

la ENERGÍA POTENCIAL total en el fluido será :

$$E = \iiint \rho \Omega^2 \delta x \delta y \delta z$$

59

Según la ecuación de Euler puede demostrarse que para fluidos incompresibles :

$$\frac{d}{dt}(T+E) = \iint p(lu+mv+nw)dS$$

En esta ecuación, el primer término representa, cambio de la energía cinética más la energía potencial con respecto al tiempo; y el segundo miembro, debido a que (lu + mv + nw) representa la velocidad del contorno normal a si mismo en la dirección del fluido, será igual a :

$$\iint p(lu + mv + nw)dS = \iint pV_n dS$$
$$\therefore \frac{d}{dt}(T + E) = \iint pV_n ds$$

que representa la razón a la cual las fuerzas de presión **pdS** actúan sobre el fluido. Por tanto, el incremento total de la energía potencial más la cinética en un fluido incompresible no viscoso es igual al trabajo hecho por la presión sobre su superficie donde actúa. Esto es válido para flujos rotacionales e irrotacionales.

(b) Energía Cinética en Flujos Irrotacionales.

El teorema de Green, que consiste básicamente en la transformación de una integral de superficie en una integral de volumen, tiene varias aplicaciones en la teoría del flujo irrotacional. Este teorema se expresa de la siguiente forma :

$$\iint (lP + mQ + nR)dS = - \iiint \left(\frac{\partial \cdot P}{\partial \cdot x} + \frac{\partial \cdot Q}{\partial \cdot y} + \frac{\partial \cdot R}{\partial \cdot z}\right) dx dy dz$$

donde: P, Q, R son funciones finitas diferenciables en una región interconectada por una o más superficies cerradas S de las cuales  $\delta S$  es un elemento; l, m, n son las direcciones coseno de la normal a  $\delta S$ . Por ejemplo P, Q, R pueden ser las componentes x, y, z de la velocidad o del momentum, o pueden representar respectivamente los productos  $\phi_u$ ,  $\phi_v$ ,  $\phi_w$ en un fluido contenido dentro de un contorno esférico cerrado u otra superficie, o en el espacio entre dos superficies cerradas una de las cuales se encuentra dentro de la otra. Estas superficies no son necesariamente contornos sólidos.

Si P, Q, R son componentes de velocidad la ecuación establece que la razón de flujo en una región cerrada es igual a menos la razón de expansión, o sea, que es igual a la razón de contracción del fluido en la región.

Se puede obtener una expresión para la energía cinética si se define a P, Q, R de la siguiente manera :

$$P = \phi u = \phi \frac{\partial \phi}{\partial x}$$
$$Q = \phi v = \phi \frac{\partial \phi}{\partial y}$$
$$R = \phi w = \phi \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

donde  $\phi$  es el potencial de velocidad.

La velocidad a lo largo de la normal n a un elemento de superficie es :

$$V_n = \frac{\partial \phi}{\partial n}$$

y es igual a la suma de las componentes u, v, w en la dirección n, o sea :

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = l \frac{\partial \phi}{\partial x} + m \frac{\partial \phi}{\partial y} + n \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

En forma similar la suma de las componentes de P, Q, R a lo largo de la normal es :

o sea :

.

$$lP + mQ + nR = l\phi \frac{\partial \phi}{\partial x} + m\phi \frac{\partial \phi}{\partial y} + n\phi \frac{\partial \phi}{\partial z}$$
$$= \phi \left( l \frac{\partial \phi}{\partial x} + m \frac{\partial \phi}{\partial y} + n \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)$$
$$= \phi \frac{\partial \phi}{\partial n}$$

lo cual permite eliminar los valores de P, Q, R del primer miembro de la ecuación de Green.

Si diferenciamos el producto  $\phi \frac{\partial \phi}{\partial n}$  tenemos :

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + \phi \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$$
$$\frac{\partial Q}{\partial y} = \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2 + \phi \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}$$
$$\frac{\partial R}{\partial z} = \left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)^2 + \phi \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$$

sumando las ecuaciones anteriores :

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)^2 + \phi \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \phi \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \phi \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$$
$$= \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)^2 + \phi \nabla^2 \phi$$
$$= u^2 + v^2 + w^2 + \phi \nabla^2 \phi$$
$$= V^2 + \phi \nabla^2 \phi$$

lo cual permite eliminar P, Q, R del segundo miembro de la ecuación de Green, y si a esta ecuación la multiplicamos por -  $\frac{1}{2}$  p tendremos :

$$-\frac{1}{2}\rho\iint\phi\frac{\partial\phi}{\partial n}dS = \frac{1}{2}\rho\iiint V^{2}dxdydz + \frac{1}{2}\rho\iiint\phi\nabla^{2}\phi dxdydz$$

Para el caso de flujo irrotacional :

 $\nabla^2 \phi = 0$ 

62

Capítulo I
entonces, el último término de la ecuación anterior desaparece :

$$-\frac{1}{2}\rho\iint\phi\frac{\partial\phi}{\partial n}dS = \frac{1}{2}\rho\iiint V^2 dxdydz$$

En la última ecuación, el segundo miembro corresponde a la energía cinética total T, por tanto :

$$T = -\frac{1}{2}\rho \iint \phi \frac{\partial \phi}{\partial n} dS$$

lo cual expresa la energía cinética total de un flujo irrotacional en términos de las condiciones sobre su superficie.

# 2

# FLUIDOS REALES.

#### 2.1 EFECTOS DE LA VISCOSIDAD

Las diferencias entre el comportamiento de un fluido real y de un fluido ideal son originadas principalmente por la existencia de la propiedad de viscosidad en el fluido real, y de su tensión superficial y capacidad para vaporizarse. La viscosidad está presente en mayor o menor grado en todos los casos de flujos de fluidos, y sus efectos van a ser estudiados a continuación.

La viscosidad resulta de los esfuerzos de corte originados dentro de un fluido cuando existe movimiento relativo de las masas de flujo adyacentes.

Estos esfuerzos de corte pueden ser considerados como fuerzas internas actuando tangencialmente sobre las superficies de las masas del fluido elemental, en adición a la fuerza de gravedad del cuerpo y a las fuerzas de superficie debido a la existencia de gradientes de presión, los cuales están incluidos en la ecuación de movimiento de Euler.

Los efectos de las fuerzas de viscosidad dependen de sus magnitudes comparadas con las de las otras fuerzas y con la inercia, o resistencia a la aceleración, de las masas fluidas. Esta última fuerza de resistencia y la componente de la fuerza de gravedad, las cuales son proporcionales a la masa de un elemento, son comúnmente conocidas como fuerzas inerciales.

Las características del fluido real dependen de las magnitudes relativas de las fuerzas viscosas e inerciales. El término flujo laminar o viscoso se refiere al estado de flujo en el cual las fuerzas de corte viscosas son de magnitud comparable o mayor que la de las fuerzas inerciales. El flujo turbulento es un estado diferente de flujo, en el cual las fuerzas viscosas son relativamente pequeñas y los efectos viscosos resultantes son diferentes a los del flujo laminar.

Las condiciones de flujo laminar y turbulento en una tubería y el criterio de Reynolds para la transición de un estado a otro, constituye un ejemplo de este peculiar comportamiento del fluido. Un fluido que se mueve a baja velocidad puede estar en régimen de flujo laminar mientras que a alta velocidad, bajo ciertas condiciones, puede ser de régimen turbulento. Cuando se incrementa la velocidad en un flujo laminar y las magnitudes de las fuerzas inerciales llegan a ser iguales a las fuerzas viscosas, el flujo adquiere cierta inestabilidad y eventualmente se produce un flujo turbulento.

Las diferencias entre las características de los dos estados de flujo son bien marcadas por lo cual se requieren métodos diferentes para analizarlos. Mientras el flujo laminar es rotacional, el movimiento de un flujo turbulento no divergente puede aproximarse a flujo irrotacional, excepto en las regiones cercanas a los contornos sólidos, donde los efectos viscosos son apreciables.

#### 2.2 FLUJO LAMINAR

El movimiento laminar de un fluido satisface la ecuación de continuidad y las ecuaciones de condiciones de contorno pero, por efectos de la viscosidad, definida por :

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}$$

existe una condición de contorno adicional basada en la evidencia experimental de que la velocidad de un fluido sobre un contorno sólido relativa a este contorno es igual a cero.

Debido a la existencia de fuerzas de corte viscosas existe una componente tangencial de esfuerzos en un punto del contorno además de los esfuerzos normales. Dentro de un fluido, los esfuerzos normales en un punto son diferentes para todos los planos y la ecuación de movimiento de Euler para fluido no viscoso no será aplicada si es que no se hacen las modificaciones correspondientes.

La variación de esfuerzos normales en un punto sobre el plano puede ser demostrada considerando los esfuerzos normales  $\mathbf{p}_x$ ,  $\mathbf{p}_y$ ,  $\mathbf{p}_\alpha$  y los esfuerzos de corte  $\tau_x$ ,  $\tau_y$ ,  $\tau_\alpha$  aplicados sobre un elemento triangular de fluido bidimensional. (Fig. 2.1)

Capítulo II





Fig. 2.1. - Fuerzas Normal y Tangencial actuando en un elemento de fluido bidimensional viscoso. (Vallentine, H.R. 1967).

Aplicando la segunda ley de movimiento de Newton para la relación del movimiento en la dirección x tenemos :

$$p_{x}a - p_{\alpha}csen\alpha + \frac{1}{2}\rho abg \cdot sen\beta + \tau_{x}b - \tau_{\alpha}c\cos\alpha = \frac{1}{2}\rho aba_{x}$$
$$\therefore p_{x} - p_{\alpha} + \frac{1}{2}\rho abg \cdot sen\beta + \tau_{x}\frac{b}{a} - \tau_{\alpha}\frac{b}{a} = \frac{1}{2}\rho ba_{x}$$

cuando a, b se aproximan a cero, la ecuación se aproxima a la forma :

$$p_x - p_\alpha + (\tau_x - \tau_\alpha) \cot g\alpha = 0 \qquad (2.1)$$

a.

Una ecuación similar se obtendrá para el movimiento en la dirección y y es evidente que los esfuerzos normales en un punto no serán los mismos para todos los planos. Puede demostrarse que en flujo viscoso tridimensional existirán seis componentes independientes de esfuerzos ( tres normales y tres de corte ) que servirán para determinar en forma completa los esfuerzos en un punto. La "presión en un punto" de un flujo viscoso se define como la media aritmética de los tres esfuerzos normales  $p_x$ ,  $p_y$ ,  $p_{\alpha}$ .

$$p = \frac{1}{3} \left( p_x + p_y + p_z \right)$$

La Ecuación de movimiento de Euler para un flujo no viscoso, puede ser modificada incluyendo los términos que representan las componentes de fuerza interna adicional debido a la viscosidad del fluido.

La demostración de la ecuación de Euler modificada es laboriosa y extensa por lo cual será suficiente indicar la naturaleza de los efectos viscosos sobre el movimiento de una partícula fluida.

La Fig. 2.2 muestra un elemento de un flujo viscoso incompresible fluyendo en la dirección x. El elemento está sujeto a esfuerzos de corte viscosos debido a la existencia de un gradiente de velocidad  $\frac{\partial u}{\partial y}$  a través del flujo.



Fig. 2.2. – Esfuerzos de corte actuando en dirección de un flujo paralelo bidimensional viscoso. (Applied Hydrodynamics, 1967).

Los esfuerzos de corte paralelos al eje x son :

$$\tau = \mu \frac{\partial \cdot u}{\partial \cdot y}$$

67

Capítulo II

$$\tau + d\tau = \mu \frac{\partial}{\partial \cdot y} \left( u + \frac{\partial u}{\partial y} \, \delta y \right)$$
$$= \mu \frac{\partial u}{\partial y} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \, \delta y$$

Si el área de la superficie de corte del elemento es S, la fuerza neta sobre el elemento será :

$$S\delta\tau = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} S\delta y$$
$$= v \delta m \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

donde  $\mathbf{v} = \mu/\rho = v$ iscosidad cinemática del fluido, y  $\delta \mathbf{m} = \rho \mathbf{S} \, \delta \mathbf{y} = \text{masa del elemento}$ 

Por tanto, la fuerza viscosa por unidad de masa debido al gradiente de velocidad  $\partial u/\partial y$  será :

$$v\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Para el caso general, con gradientes de velocidad  $\partial \mathbf{u}/\partial \mathbf{x}$ ,  $\partial \mathbf{u}/\partial \mathbf{y}$ ,  $\partial \mathbf{u}/\partial \mathbf{z}$ , la fuerza viscosa total por unidad de masa actuando en la dirección x será igual :

$$v\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$
 ó  $v\nabla^2 u$ 

Incluyendo estos términos en la primera Ecuación de Euler

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$$

donde X: componente de la gravedad en el sentido x, obtendremos la ecuación para flujo viscoso.

$$\frac{du}{dt} = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + v \nabla^2 u \qquad (2.2 \text{ a})$$

# Capítulo II

y en forma similar para las otras direcciones del movimiento :

$$\frac{dv}{dt} = Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + v \nabla^2 v \qquad (2.2 \text{ b})$$

$$\frac{dw}{dt} = Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + v \nabla^2 w \qquad (2.2 \text{ c})$$

Estas últimas tres ecuaciones son las ECUACIONES DE NAVIER-STOKES para el movimiento de un fluido viscoso. Las fuerzas del cuerpo X, Y, Z pueden ser escritas en términos de la fuerza de gravedad potencial  $\Omega = \mathbf{gh}$  como :

$$X = -\frac{\partial}{\partial x}(gh)$$
$$Y = -\frac{\partial}{\partial y}(gh)$$
$$Z = -\frac{\partial}{\partial z}(gh)$$

y las ecuaciones de Navier-Stokes quedarían :

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} (p + \gamma h) + v \nabla^2 u \qquad (2.3 a)$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} (p + \gamma h) + v \nabla^2 v \qquad (2.3 b)$$

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} (p + \gamma h) + v \nabla^2 w \qquad (2.3 \text{ c})$$

Debido a que las ecuaciones de Navier-Stokes son no lineales no se puede obtener su solución general exacta, sin embargo, es posible obtener la solución exacta para ciertos casos de flujo en los cuales algunos de los términos de la ecuación son igual a cero, y hacen posible la integración de la misma. También se pueden obtener soluciones aproximadas para flujos en los cuales algunos de sus términos no son iguales a cero pero son tan pequeños comparados con los otros que se los puede despreciar.

# **Ejemplo:**

Para un ejemplo de solución exacta consideremos el caso de flujo paralelo en el cual todas las partículas se mueven en una sola dirección, digamos  $\mathbf{x}$ .

Debido a que :

v = w = 0 $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0$ 

y por lo tanto, de la ecuación de la continuidad tenemos :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

esto es, u no varía con x.

Entonces :

$$u = f(y, z, t)$$
$$v = 0 \quad ; \quad w = 0$$

En las ecuaciones (2.3,b,c), el primero y tercer término son cero :

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} (p + \gamma h) + v \nabla^2 v$$
$$\frac{dw}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} (p + \gamma h) + v \nabla^2 w$$

por tanto :

$$\frac{\partial}{\partial y}(p+\gamma h) = \frac{\partial}{\partial z}(p+\gamma h) = 0$$

y la única ecuación que queda es (2.3 a) :

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} (p + \gamma h) + v \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

Si x se mide sobre un plano horizontal :

$$\frac{\partial}{\partial x}(\gamma h)=0$$

y la ecuación queda :

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + v\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

la cual es una ecuación diferencial linear para u.

Un caso simple de flujo viscoso paralelo, es un flujo permanente bidimensional fluyendo entre dos placas paralelas separadas en una distancia 2b y que se muestra a continuación :



Fig. 2.3. – Flujos viscosos bidimensionales con soluciones exactas : (a), (b), (c), flujos planos Couette – límite inferior fijo, límite superior móvil; (d) flujo de estagnación; (e) flujo en canal convergente; (f) flujo en canal divergente. (Hughes W.F., 1974).

De acuerdo con la figura, analizando la última ecuación

$$u = f(y)$$
 únicamente

de tal forma que :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0 \qquad ; \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

entonces :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + v \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$
$$\frac{dp}{dx} = \rho v \frac{d^2 u}{dy^2} = \mu \frac{d^2 u}{dy^2}$$

Con  $\mathbf{u} = 0$  para  $\mathbf{y} \pm \mathbf{b}$ . Como  $d\mathbf{p}/d\mathbf{x}$  es constante, la solución será :

$$u = -\frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} \left( b^2 - y^2 \right)$$

que corresponde a un perfil parabólico de velocidad.

Las soluciones exactas conocidas de las ecuaciones de Navier-Stokes, incluyen los siguientes casos de flujos (Fig. 2.3) :

- 1. Flujos Paralelos Permanentes y Variables
  - entre paredes paralelas fijas.
  - entre paredes paralelas, una de ellas moviéndose en su propio plano con o sin gradiente de presión positivo o negativo.
  - dentro de conductos cerrados de cualquier sección.
  - sobre uno de los lados de una placa en rotación.
  - entre cilindros concéntricos en rotación.
- 2. Flujos Permanentes
  - entre placas rotatorias.
  - entre placas convergentes y divergentes.
  - flujos simétricos planos y axiales normales a una placa (flujo estancado).
  - flujo en un jet laminar de sección circular.

- 3. Flujos Variables
  - adyacentes a una pared plana repentinamente acelerada.
  - adyacente a una placa que oscila en su propio plano.
  - disipación del vortex inicialmente irrotacional de un tubo por fuerzas de corte viscosas.

Las soluciones aproximadas dependen de las magnitudes relativas de las fuerzas de inercia y de las fuerzas viscosas en el flujo. Debido a que las fuerzas inerciales son proporcionales al cuadrado de la velocidad y las fuerzas viscosas son proporcionales a la primera potencia de la velocidad, es evidente que las fuerzas viscosas predominaran cuando la velocidad sea muy pequeña.

#### El Número de Reynolds

$$R = \frac{V \times l}{v}$$

Representa la relación entre fuerzas de inercia y fuerzas viscosas y el criterio para movimientos lentos o movimientos de arrastre es igual a un número de Reynolds R < 1, en los cuales las fuerzas de inercia se desprecian por ser pequeñas.

Para movimientos plásticos o de arrastre ( creeping ), las ecuaciones de Navier-Stokes sin considerar u omitiendo los términos inerciales, se reduce a tres ecuaciones de la forma :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

# 2.3 FLUJO TURBULENTO Y CAPA LÍMITE

El flujo turbulento, con sus fluctuaciones randómicas de velocidad, es esencialmente un movimiento en régimen no permanente, siendo extremamente complejo el definir sus líneas de corriente por la presencia de diferentes configuraciones de flujo de valores prácticamente distintos.

Se puede graficar una configuración de flujo, si las líneas de corriente no están basadas en la velocidad instantánea, sino en la velocidad media temporal durante un corto período, en cada punto.

Las líneas de corriente siendo tangenciales a los vectores de velocidad media, son curvas suaves y continuas que varían en forma con el tiempo.

No existe ningún método exacto de análisis para la determinación de las configuraciones de flujo turbulento, sin embargo, el concepto de capa límite clarifica grandemente las ideas sobre la influencia de la viscosidad sobre un flujo a grandes números de Reynolds y proporciona las bases para un análisis aproximado de flujo turbulento.

Cuando fluidos de baja viscosidad, tales como aire y agua, fluyen a lo largo de una pared plana, el fluido en la pared es estacionario y cerca de ella es retardado, pero, a una distancia muy pequeña desde la pared, la velocidad del fluido es prácticamente igual a aquella del cuerpo principal del flujo.

La capa fina en la cual se aprecia el gradiente de velocidad es conocida como la "capa límite".

Fuera de esta capa límite difícilmente ocurren gradientes de velocidad y debido a que la viscosidad es pequeña, sus efectos sobre el flujo son casi despreciables. La configuración de flujo al ser determinada por la forma del contorno, es prácticamente la misma que para flujo irrotacional.

En la teoría de la capa límite se asume que los efectos de viscosidad están confinados en la capa límite, y que el resto del flujo puede ser considerado como no viscoso y puede ser representado con su propia configuración. Con esta asumpción es posible desarrollar una teoría aproximada relativa a la configuración de flujo dentro de la capa límite, y suplementar la teoría con la determinación experimental de constantes.

El ejemplo más simple es el de un flujo a través de una placa fina, lisa y paralela, que no permite deflexiones laterales de flujo. Los elementos fluidos en contacto con la placa son estacionarios debido a que no existe deslizamiento de la superficie de contorno; los otros elementos pasan a lo largo del eje cercanos a la placa, siendo retardados por el efecto viscoso, y a medida que avanzan las partículas van disminuyendo sus velocidades, y la mayoría de ellas comienzan a girar retardadas por el arrastre viscoso, haciendo mover con mayor velocidad a los elementos exteriores a ellas. Es evidente que el ancho  $\delta$ , de la región de flujo retardado pueda incrementarse a lo largo del eje de la placa. Esta región es conocida como la capa límite, y el flujo en ella es laminar no obstante que el flujo de aproximación sea turbulento.

En una región a cierta distancia a lo largo de la placa, el flujo laminar se vuelve inestable y se desarrollan turbulencias dentro de la capa límite. Normalmente la localización de esta región de transición, desde una capa límite laminar a turbulenta, se define aproximadamente por el valor del número de Reynolds

$$R = \frac{V \times x}{v}$$

de entre  $2x10^5$  a  $10^6$ , donde V es la velocidad de la corriente no perturbada, y x es la distancia medida en el sentido de la corriente desde el inicio del eje de la placa. Es posible, sin embargo, producir una capa límite turbulenta a lo largo de la placa haciendo rugosa la superficie de la placa o produciendo perturbaciones en el flujo. Estas características de la capa límite están indicadas en la Fig. 2.4, donde para propósitos de claridad el ancho de la capa es exagerado.

La división entre la capa límite y la región exterior del flujo no es marcada pero si existe una zona clara de transición. El espesor  $\delta$  de la capa límite se la define como la distancia desde la placa hasta el punto en el cual la velocidad tiene un valor hasta del 1% de la velocidad del flujo irrotacional que pasa por la placa.

Para el caso de una capa límite en flujo laminar a lo largo de una placa plana (Fig.2.4a), el espesor  $\delta$  esta dado por la expresión derivada analíticamente y confirmada experimentalmente, que es la siguiente :

$$\frac{\partial_{lam.}}{x} = \frac{5}{\sqrt{U \times x/v}} = \frac{5}{R^{1/2}} \quad (2.4)$$

Para una capa límite completamente turbulenta (Fig 2.4 b), el espesor  $\delta$ , basado en la asunción de que el contorno es liso y que la distribución de velocidad a través de una normal a la placa tiene la forma :

$$u = ky^{\frac{1}{2}}$$

está dado por :

$$\frac{\partial_{turb}}{x} \approx \frac{0.38}{R^{\frac{1}{5}}} \qquad (R < 10^7) \qquad (2.5)$$



Fig. 2.4. – Distribuciones de velocidad de un flujo que pasa por una placa plana: (a) Capa límite laminar; (b) Capa límite turbulenta; (c) Capa límite laminar – turbulenta. (Applied Hydrodynamics, 1967)

donde U es la velocidad que debería existir si el flujo fuera irrotacional. La pérdida total de flujo es :

$$\int_{y=0}^{\alpha} (U-u) dy$$

Otra medida de la capa límite es el "espesor de desplazamiento",  $\delta^*$ , que es igual a la distancia en que el flujo externo es efectivamente desplazado hacia afuera de la placa, como consecuencia de la disminución de velocidad en la capa límite. La disminución de la razón de flujo en el ancho  $\delta y$  (Fig 2.5) debido a la retardación de la viscosidad es igual a :

 $(U-u)\delta y$ 

Fig. 2.5. Espesor del desplazamiento de la capa límite. (Applied Hydrodynamics, 1967)

El desplazamiento del límite en una distancia  $\delta^*$  en flujo irrotacional resultaría en una pérdida de flujo igual a U $\delta^*$ , por tanto, si :

$$U\delta^* = \int_{y=0}^{\alpha} (U-u)dy$$

el espesor del desplazamiento es igual a :

$$\delta^* = \int_{y=0}^{\alpha} (1 - \frac{u}{U}) dy$$
 (2.6)

El valor de  $\delta^*$  es aproximadamente igual al 1/3 del valor de  $\delta$  para capa límite laminar, y a 1/8 para capa límite turbulenta.

Para flujo turbulento a lo largo de una pared plana, o con un radio cuya curvatura es grande comparada con el espesor de la capa límite, la variación de la presión a través de la capa límite prácticamente no existe. Debido a que, en algunos flujos, la capa límite es extremadamente delgada, y el flujo exterior es muy cercano o puede ser aproximado a flujo irrotacional, la distribución de presión a lo largo del contorno es substancialmente idéntica a la distribución de un flujo irrotacional que pasa por el mismo contorno.

Este hecho es importante por que nos permite en muchos casos calcular o determinar las distribuciones de presión a lo largo de un contorno con flujo turbulento, aplicando la teoría de flujo irrotacional.

#### Ejemplo :

Una placa plana está inmersa, en dirección paralela a un flujo, en agua a 70° F, fluyendo con una velocidad de 8 pies/seg. Estimar la longitud de la sección laminar de la capa límite, y los espesores de la capa límite a distancias de 1 pulg., 1 pie y 10 pies a partir del eje longitudinal de la placa.

#### Solución :

Asumiendo que la capa límite de transición tiene un valor de Reynolds igual a :

$$\frac{U \times x}{v} = 5 \times 10^5$$

y haciendo que :

$$v = 1.06 \times 10^{-5}$$
 pies<sup>2</sup>/seg

tendremos :

$$x = \frac{5 \times 10^5 \times 1.06 \times 10^{-5}}{8} = 0.66 \text{ pies}$$

- A l pulgada desde el eje de la placa, la capa límite es laminar y su espesor será :

$$\delta_{\frac{1}{12}} = \frac{5 \times x}{\sqrt{U \times x/v}} = \frac{5}{12} \left( \frac{1.06 \times 12}{10^5 \times 8} \right)^{\frac{1}{2}} = 0.0017 \text{ pies } \circ 0.02 \text{ pulg.}$$

- A l pie desde el eje de la placa, la capa límite es turbulenta, y asumiendo que el espesor de la capa es la misma para toda la capa del contorno turbulento, tenemos :

$$R = \frac{U \times x}{v} = \frac{8 \times 10^5}{106} = 7.55 \times 10^5$$
$$\delta_1 = \frac{0.38 \times x}{R^{\frac{1}{5}}} = \frac{0.38}{15} = 0.025 \times 10^5 \text{ pies } 60.30 \text{ pulg}$$

- A x = 10 pies , R = 7.55 x  $10^5$ 

$$\delta_{10} = \frac{0.38 \times 10}{23.8} = 0.16$$
 pies ó 1.9 pulg

# 2.4 VELOCIDADES EN LA CAPA LÍMITE

En una capa límite laminar, la curva de distribución de velocidad normal a una pared tiene la forma de una parábola con su vértice en  $y = \delta$  como se muestra en la (Fig. 2.4 a).

Tenemos que :

$$(U-u) \propto (\delta - y)^2$$
 aproximadamente (2.7)

donde  $\delta$  se incrementa con la distancia x, a partir del eje longitudinal de la placa y el gradiente de velocidad **du/dy**, y por tanto los esfuerzos de corte sobre la placa, decrecerán cuando se incrementa x.

En una capa límite turbulenta, la curva de distribución de velocidad tiene la forma de una curva logarítmica excepto en la región delgada extrema adyacente a la placa. Si las rugosidades sobre la placa son muy pequeñas aparecerá una película muy fina de flujo

laminar, conocida como sub- capa laminar, que cubre completamente a la placa y la separa de la capa límite turbulenta (Fig. 2.6 a). El espesor  $\delta^1$  de la película laminar disminuye si la velocidad externa aumenta. Si las rugosidades no están completamente sumergidas en la subcapa, su eficiencia en transmitir los esfuerzos de corte se reduce, entonces, la resistencia al flujo depende parcialmente de los esfuerzos viscosos de corte y parcialmente de la forma de arrastre del flujo turbulento que pasa por las rugosidades. Con una velocidad externa suficientemente alta la resistencia depende totalmente del efecto de arrastre.

La distribución parabólica de velocidad a través de la sub-capa laminar en un flujo turbulento de placa lisa es casi linear como se muestra en la (Fig. 2.6) y se asume que el esfuerzo de corte es constante.



Fig. 2.6. – Capa límite en flujo turbulento : (a) Flujo turbulento sobre un pared casi lisa; (b) Flujo turbulento sobre una pared rugosa. (Vallentine H.R., 1967)

Entonces, para la subcapa, si u es la velocidad a una distancia y desde la pared

$$\frac{\tau}{\rho} = \frac{\mu}{\rho} \frac{du}{dy} \approx v \frac{u}{y} \qquad \text{constante}$$
$$\therefore \qquad \frac{u}{\sqrt{\tau/\rho}} = \frac{\sqrt{(\tau/\rho)y}}{v}$$

donde  $v_{\bullet} = \sqrt{\binom{\tau}{\rho}}$  se la conoce como Velocidad de Corte, que engloba al esfuerzo de corte y tiene las dimensiones de Velocidad. Esta última ecuación expresada en términos de

 $\tau$ , p con una relación linear asumida entre **u**, **y** en forma adimensional, puede ser comparada con las relaciones logarítmicas (Ec. 2.9, 2.10) para flujo fuera de la subcapa.

La ecuación general para capa límite en flujo turbulento, para placa lisa y rugosa, es igual a :

$$\frac{u}{v_{\star}} = 5.75 \log \frac{y}{y'}$$
 (2.9)

donde y' es el valor de y para el cual u podría ser cero de acuerdo a esta relación. En efecto, esta ecuación se aplica solo en la región limitada por y'. Se han desarrollado formas especiales de la (Ec.2.9), para flujos turbulentos en paredes lisas y rugosas por eliminación de y' y así tenemos :

Para flujo turbulento en pared lisa, y' es dependiente de v., v, y al ser eliminado de (2.9) queda:

$$\frac{u}{v_{\star}} = 5.75 \log \frac{v_{\star} y}{v} + 5.5 \tag{2.10}$$

expresión que representa la distribución de velocidad en la capa límite fuera de la subcapa laminar.

El valor de y que satisface a las ecuaciones (2.8) y (2.10) es obviamente el valor nominal del espesor de la subcapa laminar  $\delta$ ', que es igual a :

$$\delta' = 11.6 \frac{\nu}{\nu_{\star}} \tag{2.11}$$

en efecto, existe una zona de transición entre las dos regiones de flujo (Fig. 2.5 a)

- Para flujo turbulento en pared rugosa, y' se determina únicamente a partir de la altura efectiva k de las rugosidades de la placa, y eliminando y', la (Ec.2.9) queda :

$$\frac{u}{v_{\bullet}} = 5.75 \log \frac{y}{k} + 8.5 \tag{2.12}$$

Las ecuaciones (2.10) y (2.12) son las ecuaciones de Karman-Prandtl para distribuciones de velocidades en flujo turbulento que pasa por contornos lisos y rugosos.

Capítulo II

#### Ejemplo :

Agua a  $70^{\circ}$  F fluye por una superficie plana lisa. En un punto sobre la superficie a algunos pies a partir de su eje, las velocidades a  $\frac{1}{4}$  y  $\frac{1}{2}$  de pulgada desde la pared son

iguales a 6.0 y 6.5 pies/seg. respectivamente. Asumiendo que la capa límite es turbulenta, determinar y',  $v_{-}$ ,  $\delta'$  y estimar la velocidad a una pulgada desde la pared.

#### Solución :

Sustituyendo en la (Ec.3.9) los valores conocidos de  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{y}$ , se obtienen dos ecuaciones con  $\mathbf{v}_{\cdot}$ ,  $\mathbf{y}'$  desconocidos, y dividiendo la una para la otra se elimina  $\mathbf{v}_{\cdot}$ , o sea

$$\frac{u_{\frac{1}{2}}}{u_{\frac{1}{4}}} = \frac{\log\left(\frac{0.5}{y'}\right)}{\log\left(\frac{0.25}{y'}\right)} = \frac{6.5}{6.0} = 1.083$$

donde y' =  $6 \times 10^{-5}$  pulg.

 $\therefore \qquad v_{\star} = \frac{u_{\frac{1}{2}}}{5.75 \log \left(\frac{0.5}{y'}\right)} = \frac{6.5}{5.75 \log \left(\frac{0.5}{6 \times 10^{-5}}\right)} = 0.288 \text{ pies/seg.}$ 

$$\delta' = \frac{11.6\nu}{\nu_{\bullet}} = \frac{11.6 \times 1.06}{0.288 \times 10^5} = 0.00043$$
 pies = 0.0051 pulg.

La velocidad a 1" desde la pared es a partir de la, (Ec. 2.10),

$$u_1 = 0.288 \times 5.75 \log \left( \frac{0.288 \times 10^5}{1.06 \times 12} \right) + 0.288 \times 5.5 = 7.1$$
 pies/seg.

# 2.5 SEPARACIÓN DE LA CAPA LÍMITE

Las características de la capa límite presuponen la existencia de un gradiente de presión cero a lo largo del contorno y la ausencia de "separación", que es un fenómeno de importancia en la determinación de la configuración de un flujo. El término "separación de la capa límite" implica un alejamiento de la capa límite con respecto al contorno, como se ve en la Fig. 2.7.

El aumento de espesor de la capa límite con la distancia a lo largo de una placa se debe a una retardación continua de los elementos fluidos por efecto de corte en el contorno. Si, debido a la forma de los contornos del flujo las líneas de corriente convergen en la dirección del flujo, los efectos de la aceleración convectiva tienden a contrapesar los efectos de corte del contorno (que produce retardación de los elementos fluidos), oponiéndose de este modo al crecimiento del espesor de la capa límite. En otras palabras el gradiente de presión negativa asociado con la aceleración convectiva tiende a limitar el crecimiento de la capa límite.

Cuando por el contrario, la forma del contorno es tal que las líneas de corriente divergen, existirá un gradiente de presión positivo que se sumará al corte del contorno haciendo retardar al flujo cerca de la pared. El efecto que se produce en las distribuciones de velocidad es evidente y se muestra en la Fig. 2.7. El flujo cercano a la pared es continuamente retardado hasta que en el punto S su velocidad es cero; a la derecha de S, el movimiento del fluido tiene dirección contraria y el fluido se mueve alejándose del contorno. Una vez que ocurre esta separación, la distribución de presión se modifica y la línea de separación se mueve con la corriente hasta una posición de equilibrio.



Fig. 2.7 – Separación de capa Límite. (Vallentine H.R., 1967)

En la Fig. 2.7, la configuración mostrada corresponde o es esencialmente la de separación de una capa límite laminar. En el caso de una capa límite turbulenta la acción de la turbulencia retarda la separación al trasladar alguna cantidad de fluido con bajo movimiento apartándolo del contorno y entregando fluido con alta energía cinética para reemplazarlo. El efecto general que se produce retarda la separación debido al desplazamiento del punto de separación en el sentido de la corriente, o, si la desaceleración es suficientemente gradual el flujo se mantendrá sin separación. Por ejemplo, pruebas en canales divergentes muestra que no existe signo de separación hasta que el ángulo medio incluido exceda de 4°.



Fig. 2.8 – Distribución de presión en un flujo turbulento que pasa por un cilindro.

El fenómeno de separación da lugar al desarrollo de una región de baja presión sobre un cuerpo sumergido causando un aumento de arrastre en la resistencia superficial o arrastre por fricción superficial. (Fig. 2.8).

El trazado de las líneas de corriente es simple cuando se intenta minimizar esta forma de arrastre, proveyendo de un contorno que permita una divergencia gradual del flujo con una pequeña separación. Esto se muestra en la Fig. 2.9. donde aparece la configuración de un flujo bidimensional que pasa a través de un obstáculo, y de cuerpos de forma circular e hidrodinámica.



Fig. 2.9. – Separación y formas del contorno : (a) cuerpo escarpado; (b) cilindro, capa límite laminar; (c) cilindro, capa límite turbulento; (d) perfil de línea de corriente. (Milne Thomson, 1968)

Una divergencia muy pronunciada de un contorno con respecto al flujo, da lugar a una separación inmediata, tal como ocurre en flujos que pasan a través de placas planas normales al flujo, y en flujos jet que pasan por un orificio. La forma de la superficie de separación depende, además de otros factores, de si el flujo esta sumergido en fluido de igual densidad, por ejemplo jet de aire en aire, o en un fluido de más baja densidad, por ejemplo jet de agua en aire. En el último caso, el efecto del fluido que rodea al jet de agua es despreciable, y un análisis de flujo irrotacional nos da una buena aproximación sobre la forma de la superficie de separación.

# 2.6 ECUACIÓN DE BERNOULLI

La Ecuación de Bernoulli basada en las asunciones de flujo permanente, irrotacional y no viscoso es la siguiente :

$$\frac{V^{2}}{2} + \frac{p}{\rho} + gh = C$$
  

$$\dot{o}$$
  

$$\frac{V^{2}}{2g} + \frac{p}{\gamma} + h = H$$

La forma especial, relacionada con puntos sobre una línea de corriente, aplicable solo para flujo permanente y no viscoso, es la siguiente :

$$\frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gh = C^1$$
$$\frac{V^2}{\rho} + \frac{p}{\rho} + h = H^1$$

$$2g \gamma$$
  
es nunca es irrotacional, aún cuando la

El flujo de fluidos reales nunca es irrotacional, aún cuando la configuración de un flujo turbulento fuera de la capa límite, en flujos convergentes, parezca flujo irrotacional. Los esfuerzos de corte viscosos en flujo laminar y turbulento producen la conversión continua de la energía del fluido en calor, por tanto, las Ecuaciones de Bernoulli no son estrictamente aplicables a flujo de fluidos reales.

Por el método de análisis unidimensional, se puede utilizar una forma modificada de la Ecuación de Bernoulli en la cual se hace una aproximación para la energía disipada por la acción viscosa. Los valores medios de los términos de la ecuación sirven para todas las partículas fluidas sobre un plano de dirección normal a la dirección general del flujo.

Para cálculos precisos, el termino correspondiente a la energía cinética debe ser modificado por el factor  $\alpha$  para permitir la variación de la velocidad a través del plano. Debe añadirse un termino adicional, **h**<sub>f</sub>, que representa la energía disipada por los efectos viscosos, o fricción del fluido, y tendríamos :

$$\propto_1 \frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \infty_2 \frac{V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + h_j$$
(2.13)

En algunos casos, las correcciones por energía cinética no son aplicables, así por ejemplo, sobre distancias cortas, en flujo turbulento sin separación, el término de disipación de energía es frecuentemente pequeño en comparación con los otros términos y puede ser omitido. La Ecuación de Bernoulli para estos casos es aplicable como una buena aproximación.

Gráficos de Redes de Flujo

3

# **GRAFICOS DE REDES DE FLUJO.**

De las consideraciones de las características del flujo de fluidos reales, se pueden obtener importantes conclusiones para la determinación de sus configuraciones, entre las que se puede mencionar :

- Las configuraciones para flujo laminar pueden ser determinadas totalmente, en un número limitado de casos, de manera exacta o aproximada, utilizando las ecuaciones de flujo viscoso.
- 2. Las configuraciones para flujo turbulento, con capas límites laminares o turbulentas, pueden ser aproximadas por medio del análisis de flujo irrotacional, siempre que el flujo no sea divergente. El método se aplicará siempre que existan capas límites de pequeño espesor y no existan cambios apreciables de presión a través de estas capas. Como una aproximación, la capa límite delgada es ignorada y la configuración temporal del flujo turbulento es tratada como flujo irrotacional.

# 3.1 MÉTODO GRÁFICO.

#### Principio

Una red de flujo-consiste en una familia de líneas de corriente y una familia de líneas de potencial de velocidad, dibujadas en tal forma que representen una configuración de un flujo irrotacional bidimensional. En cualquier punto de la configuración se cumplirá que :

$$V = \frac{dQ}{dn} = \frac{\delta \cdot \psi}{\delta \cdot n} = \frac{\delta \cdot \phi}{\delta \cdot s}$$

donde,  $\delta n$ ,  $\delta s$  son los espaciamientos entre líneas de corriente y líneas equipotenciales respectivamente. Si los intervalos para  $\delta \psi$ ,  $\delta \phi$  son iguales a los espaciamientos  $\delta n$ ,  $\delta s$  en todos los puntos de la red, la configuración del flujo estará representada por unidades de forma cercana a la cuadrada. En cada unidad las líneas medianas son iguales y los ángulos de intersección son rectos. Estas características permiten construir la red por medio de pequeños cuadrados siguiendo el método de prueba y error, hasta encontrar el diagrama que representa toda la configuración hasta los límites conocidos del flujo. Este método se presta para ciertos errores e inexactitudes pero sin embargo ofrecen una aproximación aceptable.

# Método de Construcción

El procedimiento gráfico para la construcción de una red de flujo es como sigue :

a. Se seleccionan o definen el número de líneas de corriente requeridas para obtener los detalles necesarios con la precisión deseada. Posteriormente se pueden graficar secciones de red con el fin de obtener exactitud mayor en ciertos puntos del flujo. Dibuje las líneas de corriente en las regiones donde la distribución de velocidad es evidente, tales como, flujos paralelos o radiales.



Fig. 3.1 – Construcción de una red de flujo. (Vallentine, H.R., 1967)

b. Grafique las porciones restantes de las líneas de corriente por medio de curvas suaves. El espaciamiento podría decrecer con el decremento del radio sobre las curvas, debido a que en flujo irrotacional a lo largo de una trayectoria curva el producto de la velocidad por el radio es constante.

#### Gráficos de Redes de Flujo

c. Dibuje las líneas potenciales. Debido a que deben cumplirse las condiciones de intersección entre todas las líneas de corriente, y que se deben formar cuadrados, será necesario ajustar las ubicaciones iniciales de las líneas de corriente. El proceso de ajuste es de prueba y error en el cual el operador adquiere práctica para pensar en dos dimensiones. Las diagonales de los cuadrados formarán curvas suaves continuas y sus intersecciones normales podrán ser usadas para chequear la exactitud de la red.



Fig. 3.2 – Red de flujo sobre un vertedero. (Vallentine, H.R., 1967)

En los puntos de estagnación es imposible obtener un espaciamiento infinito de líneas de corriente en la región, por tanto, la primera línea de potencial dibujada deberá ser aquella adyacente al punto de estagnación.

d. Las superficies libres, tales como jets y vertederos deben ser ubicados de tal forma que cuando se dibuja la red la velocidad a lo largo de la superficie libre esté de acuerdo con las condiciones de contorno del problema.

Por tanto, para el caso de perfiles tipo jet, los cuales se asume no son afectados por la gravedad, el espaciamiento de las líneas potenciales a lo largo de la superficie libre debe ser constante, indicando velocidad superficial constante, correspondiente a una presión superficial constante. La velocidad no será constante a través del jet a menos que las líneas de corriente sean paralelas.

Para perfiles jet y vertederos afectados apreciablemente por la gravedad, el espaciamiento de las líneas potenciales a lo largo de la superficie libre debería ser tal que la velocidad en cualquier punto de la superficie será igual a la distancia hasta ese punto por debajo de la línea de cabezal total :

$$V = \sqrt{2gh_{\nu}} = \frac{\delta \cdot \phi}{\delta \cdot s}$$

donde  $\delta s$  es el espaciamiento de las líneas  $\varphi$  en la superficie libre y  $h_v$  es la velocidad del cabezal igual a (H - Z).

$$\therefore \qquad \delta \phi = \sqrt{2g} \sqrt{h_v} \delta \cdot s \qquad (3.1a)$$

$$\phi_n - \phi_o = \sqrt{2g} \sum_{o}^{n} \left[ \sqrt{h_v} \cdot \delta \cdot s \right] \qquad (3.1b)$$

Debido a que  $\delta \phi$  es constante el producto  $\sqrt{(h_v)}$ ,  $\delta s$  deberá ser constante para todos los puntos sobre la superficie libre, y el cambio total en  $\phi$  desde un origen arbitrario hasta cualquier punto de la superficie libre deberá ser igual a la ecuación :

$$\phi_n - \phi_o = \sqrt{2g} \sum_{o}^{n} \left[ \sqrt{h_v} \cdot \delta \cdot s \right]$$

e. Las distribuciones de presión para flujos sin efectos gravitacionales pueden ser ploteadas en términos de (p-po), o en la forma adimensional

$$\frac{p-p_0}{\frac{1}{2}\cdot\rho\cdot V_0^2}$$

Para flujos con efectos gravitacionales sin superficie libre se utiliza para la distribución de presiones, la altura piezométrica :

$$h = \frac{p}{\gamma} + Z$$

o el término adimensional

$$\frac{h-h_0}{V_0^2/2g}$$

Para flujos gravitacionales con superficie libre, la presión  $p/\gamma$  es una variable conveniente para propósitos de ploteo de la distribución de presión.

f. Cuando la velocidad en el contorno alcanza un máximo y luego decrece en la dirección del flujo, ocurre una tendencia a separarse. Esta separación se origina como resultado de una desaceleración local y la configuración resultante del flujo difiere del flujo indicado para la red, por lo cual, el método gráfico es inaplicable en la región donde el flujo es afectado por la separación.

Gráficos de Redes de Flujo

#### 3.2 METODO POR ANALISIS NUMERICO

Para los casos en los cuales la determinación de la configuración de un flujo es compleja debido a la forma de los contornos, y no puede ser obtenida por los métodos analíticos ordinarios, se recurre a los métodos numéricos de integración basados en el cálculo de las diferencias finitas. La aproximación general requiere asumir una red de valores  $\psi$ ,  $\phi$ , cuyos valores son sistemáticamente ajustados para satisfacer la Ec. de Laplace y las condiciones de contorno. Este método solo ofrece soluciones particulares pero es simple y puede ser fácilmente adaptado a un computador.

Consideremos una malla cuadrada de lado a, sobrepuesta en el plano xy, de una configuración de flujo y sean los valores para  $\psi$  en las intersecciones 1, 2, 3, 4 iguales a  $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$  respectivamente. (Fig. 3.3a)



*Fig. 3.3 – Definición de la forma numérica de la Ecuación de Laplace.* (*a*) *Cruce simétrico, (b) Cruce asimétrico.* 

Es característica de la ecuación de Laplace que si la malla es lo suficientemente fina, el valor de  $\psi_0$  en **0** será casi igual al valor numérico promedio de  $\psi_1$ ,  $\psi_2$ ,  $\psi_3$ ,  $\psi_4$  como se demuestra a continuación.

Asumimos con un pequeño error que la variación de  $\psi$  entre dos intersecciones adyacentes de la malla es linear, entonces, para los puntos A y B tendremos :

$$\frac{\partial \cdot \psi}{\partial \cdot x}\Big|_{A} = \frac{\psi_{1} - \psi_{0}}{a}$$
$$\frac{\partial \cdot \psi}{\partial \cdot x}\Big|_{B} = \frac{\psi_{0} - \psi_{3}}{a}$$

y para el punto 0, tenemos :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \cdot x^2} = \frac{\frac{\partial \cdot \psi}{\partial \cdot x}\Big|_{A} - \frac{\partial \cdot \psi}{\partial \cdot x}\Big|_{B}}{a} = \frac{\psi_1 + \psi_3 - 2\psi_0}{a^2}$$

En forma similar :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \cdot y^2} = \frac{\psi_2 + \psi_4 - 2\psi_0}{a^2}$$

$$\therefore \qquad \frac{\partial^2 \psi}{\partial \cdot x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \cdot y^2} = \frac{\psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \psi_4 - 4\psi_0}{a^2}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \cdot x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \cdot y^2} = \nabla^2 \psi = 0$$

8.35

por tanto si los valores  $\psi_1$ ,  $\psi_2$ ,  $\psi_{3....}$  son correctos

$$\psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \psi_4 - 4\psi_0 = 0$$

$$\therefore \qquad \psi_0 = \frac{1}{4} (\psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \psi_4) \tag{3.2}$$

Con los valores aproximados para  $\psi$  la última ecuación no será satisfecha y el objeto de las operaciones sucesivas es el de ajustar los valores de  $\psi$  de tal forma que la ecuación sea satisfecha para toda la malla. De los varios métodos usados para el ajuste el que va a ser descrito es el más recomendable por su simplicidad.

Para este método y para el método gráfico es necesario contar con suficiente información con respecto a los límites incluyendo los límites dentro y fuera del flujo. Para flujo permanente, los contornos sólidos son líneas de corriente, y los contornos de superficie libre son líneas de corriente de presión constante. En contornos dentro y fuera del flujo pueden haber líneas que cruzan con velocidad constante, como en las regiones de flujo uniforme o radial, o pueden haber líneas simétricas que se extienden a lo largo de la configuración del flujo.



El procedimiento del análisis numérico se describe con referencia a la siguiente figura :

Fig. 3.4. – Flujo irrotacional a través de un cilindro colocado entre paredes paralelas.

Debido a la simetría de la figura solo se considera un cuarto de la misma :



Fig. 3.5 – Flujo a través de un cilindro entre paredes paralelas, por análisis numérico. Relajación de la malla. Las líneas punteadas largas muestran la posición estimada de las 3 líneas de corriente y a partir de esta se obtienen los valores numéricos iniciales en cada nodo. Las líneas punteadas cortas están basadas en un flujo de 90° en la esquina.. ✓ Significa que la relajación no altera el valor. (Vallentine, H.R., 1967)

## Gráficos de Redes de Flujo

El límite o contorno interior al flujo está ubicado en la línea AE, normal a la dirección del flujo en una región donde la distribución de velocidad se asume es prácticamente uniforme. En el límite exterior BC la velocidad no es uniforme, las líneas de corriente son curvas y la velocidad varía en forma inversa con el radio, sin embargo, a lo largo de esta línea de simetría las tangentes a todas las líneas de corriente son paralelas al límite AB y por tanto la aceleración en dirección del flujo es cero.

Los otros límites AB y EDC son líneas de corriente. Estas son por tanto las condiciones de contorno del problema. Los pasos que se siguen en este método son los siguientes :

- 1. Se dibujan a escala los límites conocidos y se hace una distribución arbitraria de los valores de  $\psi$  sobre las líneas de corriente del contorno. En nuestro ejemplo la línea central (C.L) longitudinal y del contorno del cilindro se toman como  $\psi = 0$  y el plano sobre la pared como  $\psi = 100$ .
- 2. Superponemos en el dibujo una malla rectangular de cuadrados iguales. Esta malla no es la red de flujo. En cada intersección de la malla, o nodo, se coloca un valor estimado de  $\psi$  en ese punto. A lo largo de los límites o contornos, los valores de  $\psi$  deben estar de acuerdo con los valores conocidos.

En nuestro ejemplo, los valores de  $\psi$  varían uniformemente de 0 a 100 a lo largo de EA. A lo largo de BC la distribución de valores  $\psi$  no es uniforme pero pueden ser asumidos, por simetría, si consideramos que las distribuciones de  $\psi$  son idénticas para PQ y P'Q'. Las tres líneas de corriente dibujadas  $\psi = 75$ ,  $\psi = 50$ ,  $\psi = 25$  nos dan una guía de la estimación de los valores interiores de  $\psi$ .

3. En cada nodo, asuma el valor de  $\psi$  y calcule el valor promedio de los cuatro valores más cercanos al nodo de acuerdo con la ecuación :

$$\psi_0 = \frac{1}{4}(\psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \psi_4)$$

Para relajar los nodos sobre el contorno BC, los ajustes realizados en la línea PQ son colocados en los correspondientes nodos sobre la línea P'Q'. (imagen).

4. Un nodo puede tener uno o dos de sus brazos más pequeños que el espaciamiento normal de la malla y los valores de ψ en los extremos de los brazos cortos tendrán una influencia mayor que la normal sobre el valor central de ψ. Para estos casos de asimetría se deben hacer aproximaciones de ajuste y en lugar de usar la ecuación anterior se debe utilizar la ecuación que se obtiene del análisis de la Fig. 3.3b anterior, en la cual tenemos :

- espaciamiento normal del nodo a
- longitud de los brazos cortos  $\lambda_1 a$ ,  $\lambda_2 a$ , respectivamente

y desarrollando en forma similar a la de la ecuación (3.2) e incorporando las aproximaciones

$$\frac{1}{2}(1+\lambda_1)\approx\frac{1}{2}(1+\lambda_2)\approx 1$$

se tiene :

$$\psi_{0} = \frac{\psi_{1}/\lambda_{1} + \psi_{2}/\lambda_{2} + \psi_{3} + \psi_{4}}{1/\lambda_{1} + 1/\lambda_{2} + 2}$$
(3.3)

Por ejemplo, para el nodo R de la Fig. 3.5 que tiene un brazo corto  $\lambda_1 = \frac{1}{4}$ , aplicando la última ecuación se obtiene, con  $\lambda_2 = 1$ :

$$\psi_0 = \frac{4\psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \psi_4}{7}$$

esta última fórmula se usa para relajar el punto R.

- 5. Debido a que el valor  $\psi$  de un nodo entra en el cálculo de  $\psi$  de los cuatro nodos que lo rodean, cada relajación afecta a los cuatro nodos, es necesario efectuar la relajación de la malla varias veces hasta que el ajuste debido al relajamiento sea insignificante. En el ejemplo de la fig. 3.5 se han realizado tres grupos de relajaciones.
- 6. La precisión del procedimiento puede ser incrementada si se vuelven a dibujar los límites y se sobrepone una malla más fina sobre todo el flujo o solo sobre un sector, como se muestra en la siguiente figura. Los valores de ψ para los nodos intermedios pueden ser interpolados.



Fig. 3.6. – Análisis numérico. Porción de la hoja de cálculo de la malla relajada de la Fig. 3.5. Los valores grandes se obtienen del análisis de la malla. (Vallentine, H.R., 1967)

7. Finalmente las líneas de corriente son dibujadas sobre la base de los valores de  $\psi$  ajustados y de esta forma se establece la configuración del flujo.



Fig. 3.7. – Análisis numérico. Porción final de la configuración del flujo obtenida por interpolación. (Vallentine, H.R., 1967)

Gráficos de Redes de Flujo

#### 3.3 ANALOGIAS EXPERIMENTALES.

#### 3.3.1. Analogía de la Membrana

Una membrana fina elástica, tal como una lámina de caucho o una película de jabón, se supone puede ser encerrada dentro de una configuración de forma adecuada, de manera que los contornos tridimensionales de esa superficie correspondan lo más exactamente posible a las líneas de corriente de una configuración de flujo.

La ecuación de la membrana puede escribirse :

ó

$$f(x, y, z) = 0$$
$$z = f(x, y)$$



Fig. 3.8 - Fuerzas actuando sobre una membrana.

En cada punto sobre la superficie, las fuerzas internas elásticas o de tensión superficial y cualquier fuerza externa presente están en equilibrio. Se asume que la membrana es tan fina que su rigidez es despreciable, y que las fuerzas de gravedad no necesitan ser tomadas en cuenta; el esfuerzo interno  $\sigma$  está presente en todas las direcciones y es constante, y las deflexiones se asume son tan pequeñas que los esfuerzos secundarios debido a ellas no necesitan ser considerados.

Para un pequeño elemento ABCD de la superficie, de dimensiones dx, dy (fig. 3.8b,c), la magnitud de la componente vertical de la fuerza interna actuando sobre el lado AB es igual a :

$$V = \sigma \delta y sen \alpha$$

 $\approx \sigma \delta y \frac{\partial z}{\partial x}$
Capítulo III

siempre que  $\alpha$  sea pequeño.

La magnitud de la componente vertical actuando sobre el lado CD es igual a :

$$V = \frac{\partial V}{\partial x} \delta x$$

de tal forma que la fuerza neta hacia arriba sobre los lados AB y CD es :

$$\frac{\partial V}{\partial x} \approx \sigma \partial^2 z / \partial x^2 \delta x \delta y$$

En forma similar la fuerza neta hacia arriba sobre los lados BC y DA será igual a :

$$\frac{\partial V}{\partial y} \approx \sigma \partial^2 z / \partial y^2 \delta x \delta y$$

Si existiere un exceso de presión,  $\Delta p$ , actuando sobre la parte interior de la membrana, para que haya equilibrio vertical del elemento deberá cumplirse que :

$$\sigma \partial^2 z / \partial x^2 \delta x \, \delta y + \sigma \partial^2 z / \partial y^2 \delta x \, \delta y + \Delta p \, \delta x \, \delta y = 0$$
$$\partial^2 z / \partial x^2 + \partial^2 z / \partial y^2 = \Delta p / \sigma$$
(3.4)

esta última ecuacion es la Ecuación de Poisson.

Las ecuaciones de Navier-Stokes, para flujo viscoso en régimen permanente a lo largo de un conducto con área seccional cualquiera, en la dirección z, tiene la siguiente forma :

$$\partial^2 w / \partial x^2 + \partial^2 w / \partial y^2 = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dz}$$
 (constante)

siendo igual a cero el valor de la velocidad w en todos los puntos del contorno del conducto.

Una membrana alargada a través de un plano que tenga la forma del contorno de un conducto y que ha sido extendida por un exceso de presión interna  $\Delta p$ , tal que, para cualquier escala :

$$\Delta p = -\sigma / \frac{dp}{dz} / \frac{dp}{dz}$$

99

formará una superficie cuyos contornos o líneas de altura constante, z, corresponden a la línea de velocidad constante, w, sobre la sección del conducto.

Si  $\Delta p = 0$ , la ecuación (3.4) se transforma en la Ecuación de Laplace.

$$\partial^2 z / \partial x^2 + \partial^2 z / \partial y^2 = 0$$

en la cual, z puede ser considerada en forma análoga como  $\psi \circ \phi$  en flujo irrotacional.

En la analogía para flujo viscoso descrita anteriormente, la membrana es alargada a través de la trayectoria del flujo; en la analogía para flujo bidimensional irrotacional la membrana es extendida de tal forma que su proyección se sitúa en el plano del flujo. Por ejemplo si z representa a  $\psi$  en cualquier escala, resultará una configuración de flujo paralelo a la corriente si usamos un plano de la membrana de ancho constante, extendido en la dirección del flujo, pero inclinado en una dirección normal a aquella del flujo. Los contornos o líneas de igual valor z vendrían a ser líneas paralelas en la dirección del flujo, igualmente espaciadas en el plano.

La superficie de la membrana no debe coincidir necesariamente en un solo plano. En la siguiente figura se muestra un ejemplo de membrana no-planar utilizada para determinar la configuración de un flujo irrotacional en una contracción simétrica.



Fig. 3.9. – Uso de la analogía de la membrana para determinar la configuración de un flujo en una contracción simétrica. (Vallentine, H.R., 1967)

## 3.3.2. Analogía Eléctrica

El flujo de corriente eléctrica en un conductor bidimensional es análogo a un flujo irrotacional. El potencial eléctrico V correspondería a  $\phi$  y las componentes  $\mathbf{E}_x$ ,  $\mathbf{E}_y$  del vector de resistencia de campo E corresponderían a u, v respectivamente. Las ecuaciones relevantes en la teoría del campo eléctrico son :

$$\partial^2 V / \partial x^2 + \partial^2 V / \partial y^2 = 0$$

$$E_x = \frac{\partial V}{\partial x} \qquad \qquad E_y = \frac{\partial V}{\partial y}$$

Una placa de material conductor, o una placa bañada con electrolito está en condición de representar un contorno similar al de una configuración del flujo a ser investigado. Si se establece una diferencia de voltaje a lo largo del conductor, entre el flujo a la entrada y salida del contorno, se obtendrá una configuración del potencial geométricamente similar a aquella en el fluido. Un voltímetro o potenciómetro podrá utilizarse para determinar la localización de las líneas de potencial constante.

Si se establece una caída de voltaje a través del flujo entre los límites que representan los contornos sólidos, el voltímetro podrá utilizarse para localizar un grupo de líneas ortogonales al primer grupo, o sea, se determinarían las líneas de corriente.



Fig. 3.10 - Analogia Eléctrica.

Gráficos de Redes de Flujo

3.3.3. Analogía de Flujo Viscoso

. .

En un flujo viscoso entre dos placas horizontales paralelas separadas una pequeña distancia, la distribución de velocidad es parabólica. Para pequeñas velocidades ( creeping

= plasticas ), la velocidad media en cualquier región dentro de las placas es proporcional al gradiente de presión, tal que, aproximadamente tendríamos :

$$u = -k \frac{\partial p}{\partial x} \qquad v = -k \frac{\partial p}{\partial y}$$

sustituyendo estos valores en la ecuación de la continuidad tenemos :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 0$$

o sea, que la presión es análoga al potencial de velocidad de un flujo irrotacional. Hele-Shaw demostró la aplicación de este método para la determinación de la configuración de un flujo irrotacional, para ello, hizo fluir lentamente entre dos placas de vidrio separadas en una pequeña distancia, un fluido transparente. A continuación a intervalos regulares agregó en forma continua, una tintura a lo largo del contorno interior del flujo y luego se observaron las trayectorias o huellas que aparecen en el fluido y que corresponden a las líneas de corriente. Esto se puede realizar para cualquier tipo de contorno u objeto sumergido entre placas paralelas como se muestra en la figura.



Fig. 3.11 – Configuración de un flujo a través de un cilindro. (Lamb, H., 1945)

Existe una ligera discrepancia en la vecindad de los contornos, en los lugares donde la distancia desde los contornos es del mismo orden del espaciamiento entre placas. Para reducir o minimizar esta discrepancia se debe disminuir el espaciamiento entre placas.

## 3.4 REDES DE FLUJO

Se ha demostrado que la configuración de un flujo bidimensional puede ser representado gráficamente por un conjunto de líneas de corriente que dividen al flujo en un número de fajas o canales de igual razón de flujo  $\delta Q$ .

Debido a que  $\delta Q = \delta \psi$ , el cambio de flujo entre una línea de corriente y la siguiente tendrá un dy constante en toda la configuración del flujo.

Si el espaciamiento lateral de la línea de corriente en la región fluida es  $\delta n$  entonces la velocidad en ese punto es aproximadamente igual a :

$$V = \frac{\delta Q}{\delta n} = \frac{\delta \psi}{\delta n}$$

Debido a que  $\delta Q$  = constante, la velocidad es inversamente proporcional a  $\delta n$ .

Si el flujo es irrotacional la configuración del flujo puede ser representado con igual precisión por medio de líneas de potencial constante escogidas de tal forma que el cambio,  $\delta \phi$ , desde una línea equipotencial a la próxima sea constante. En cualquier punto :

$$V = \frac{\delta\phi}{\delta s}$$

aproximadamente, donde  $\delta s$  es el espaciamiento entre líneas equipotenciales y s se mide a lo largo de la línea de corriente que pasa por el punto.

Si las familias de líneas de corriente y de líneas equipotenciales son graficadas en una misma figura, la red resultante de las líneas se la conoce como RED DE FLUJO, y en la región para cualquier punto seleccionado, la velocidad está dada por las ecuaciones :

$$V = \frac{\delta Q}{\delta s} = \frac{\delta \psi}{\delta n}$$
$$V = \frac{\delta \phi}{\delta s}$$

103

Gráficos de Redes de Flujo

Capítulo III

$$\therefore \quad V = \frac{\delta \psi}{\delta s} = \frac{\delta \phi}{\delta s}$$

Si como es usual, las líneas  $\phi$  y las líneas  $\psi$  son seleccionadas de tal forma que  $\delta \phi = \delta \psi$ ; de acuerdo con la ecuación anterior, en la vecindad de cualquier punto,  $\delta s = \delta n$ , el espaciamiento de las líneas  $\psi$  será igual al espaciamiento de las líneas  $\phi$ . Debido a que  $\phi$  y  $\psi$  se interceptan en ángulos rectos la configuración resultante es una malla de cuadriláteros ligeramente distorsionados por la curva del flujo, pero aproximándose a la forma de cuadrados cuando el número de líneas  $\psi$  es incrementado.

A continuación se enumeran algunas características de las redes de flujo :

(1). Las redes de flujo se sustentan en la asunción de flujo irrotacional, y no es necesario que el flujo sea permanente.

(2). Solo existe una configuración de flujo posible para un grupo de condiciones de contorno, y la red de flujo si es graficada correctamente representará a esta configuración.

(3). Las líneas de φ interceptan a las líneas ψ formando ángulos rectos.

(4). Las figuras que forman las mallas son aproximadamente cuadradas, tienen iguales sus medianas y forman ángulos de  $90^{\circ}$ , excepto en los puntos de estagnación y en los puntos de velocidad teórica infinita.

(5). En regiones de flujo uniforme los cuadrados son de dimensiones iguales. En flujo divergente estas dimensiones aumentan, y en flujo convergente disminuyen en la dirección del flujo. Los espaciamientos de  $\phi$  y  $\psi$  son iguales e inversamente proporcionales a la velocidad en cualquier punto.

(6). Las dimensiones de los cuadrados disminuyen en el sentido de las curvas interiores (Fig. 3.12), o sea, disminuye el radio de la línea de corriente en un flujo curvo debido a que en un flujo irrotacional alrededor de una trayectoria curva el producto de la velocidad por el radio es constante.

$$Vr = constante$$

$$\therefore \quad \delta n \propto \frac{1}{V} \propto r$$



Fig. 3.12 - Flujo irrotacional en una trayectoria curva. Vr=constante.

La ventaja del concepto de red de flujo radica en que se basa en un método gráfico simple de prueba y error, para determinar la configuración de un flujo para ciertas condiciones de contorno.

# 3.5 CONFIGURACIONES ESTANDAR DE FLUJOS

A partir de una configuración se puede obtener las distribuciones de presión y velocidad en función de las relaciones de sus dimensiones lineares, sin embargo, en muchos casos es más ventajoso, en la investigación de las características de un flujo particular, obtener si es posible, expresiones matemáticas generales para las distribuciones de presión y velocidad. Un método muy utilizado para el tratamiento matemático de algunas configuraciones de flujo bidimensional es el método de la "transformación conforme". Existe otro método, en el cual la configuración requerida es desarrollada por combinación simple de configuraciones estándar, que lo vamos a tratar a continuación.

Primero establecemos las funciones  $\phi$ ,  $\psi$  para cuatro combinaciones elementales de flujo irrotacional bidimensional que son: flujo uniforme, fuente (o sumidero), vórtice y doublet. En función de estas configuraciones se han efectuado algunas combinaciones y encontrado las siguientes configuraciones de interés práctico :

Fuente y Sumidero Vórtice par Fuente y vórtice ( vórtice espiral ) Fuente y flujo uniforme ( flujo a través de un cuerpo semisumergido ) Doublet y flujo uniforme ( flujo a través de un cilindro ) Doublet, vórtice y flujo uniforme ( flujo a través de un cilindro con circulación ) Fuente, Sumidero y flujo uniforme (flujo a través de un cuerpo de Rankine )

## Gráficos de Redes de Flujo

Estas configuraciones permiten obtener soluciones cuantitativas para algunos problemas y rápidas soluciones cualitativas para otros en los cuales, las configuraciones pueden ser representadas en forma aproximada por una combinación de configuraciones estándar de flujo.

## Flujo Uniforme

Para flujo uniforme, o paralelo, régimen constante, e irrotacional, con velocidad V, inclinado un ángulo  $\alpha$  con respecto al eje x (Fig. 3.13), tenemos :

$$u = V \cos \alpha = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}$$
$$v = V sen\alpha = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$
$$\phi = V (x \cos \alpha + y sen\alpha)$$
$$= ux + vy$$
$$\psi = V (y \cos \alpha - x sen\alpha)$$
$$= uy - vx$$

Las constantes de integración han sido omitidas para las expresiones de  $\phi$ ,  $\psi$ ; tales constantes no afectan a la configuración de las líneas de  $\phi$ , y  $\psi$  es usual omitirlas en tratamientos generales. Si estas constantes son requeridas podrán ser evaluadas, en base a valores numéricos conocidos de  $\phi$  (o de  $\psi$ ) en algún punto definido en la configuración del flujo.

En coordenadas polares las ecuaciones anteriores tendrán la forma :

$$\phi = Vr (Cos\theta Cos\alpha + Sen\theta Sen\alpha) = Vr cos (\theta - \alpha)$$
$$y = Vr (Sen\theta Cosa - Cos\theta Sen\alpha) = Vr sen (\theta - \alpha)$$



Fig. 3.13 – Flujo uniforme a un ángulo  $\alpha$  con relación al eje x.

Los casos especiales de flujo paralelo al eje x ó y se obtienen por sustitución del valor apropiado de  $\alpha$ .

### Fuente

Si la configuración de flujo en el plano x-y es radial a partir de un punto y simétrica en todas las direcciones en el plano de referencia, a este punto se lo conoce como "fuente simple", (Fig. 3.14). Si el flujo es radial hacia el punto es conocido como "sumidero". Las fuentes y sumideros son conceptos matemáticos que no poseen una contrapartida en la naturaleza, así, la fuente involucra la creación continua de fluido en un punto, y el sumidero la evacuación continua de fluido en un punto, y el aproximan a valores infinitos.



Fig. 3.14. – Fuente en el origen;  $\psi = \frac{Q}{2\pi}\theta = m\theta$  (Milne Thomson, 1968)

107

Gráficos de Redes de Flujo

La importancia y el valor del concepto de fuente y sumidero radica en el hecho de que por combinación con otras configuraciones más simples se pueden obtener configuraciones más complejas que representen configuraciones de flujos que ocurren en la naturaleza.

La fuerza de una fuente es definida como el flujo total por unidad de tiempo Q; para un sumidero la fuerza es - Q.

A cualquier radio r desde una fuente, si la velocidad tangencial v $\theta$  es cero, entonces :

$$V_{\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0$$

esto quiere decir que,  $\phi$  varía solo con r; y  $\psi$  varía solamente con  $\theta$ .

De la ecuación (1.16)

$$v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}$$
$$v_r = \frac{Q}{2\pi r} = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}$$
$$\phi = \frac{Q \ln r}{2\pi} = m \ln r$$

$$\psi = \frac{Q}{2\pi\theta} = m\theta \tag{3.5}$$

donde,  $m = \frac{Q}{2\pi}$  es una constante para una fuente dada.

Como se ve en la Ec. (3.5) la función  $\psi$  es cíclica, y es necesario que  $\theta$  esté restringida al rango entre 0 a  $2\pi$  (el origen es un punto singular), lo cual puede hacerse introduciendo una barrera imaginaria que se extiende desde el origen a lo largo del eje positivo x. Esta barrera no es un obstáculo para el flujo y sirve para convertir la región doble conectada a simple conectada, como se muestra en la figura. El valor de y sobre la cara superior de la barrera es igual a cero, y en la cara inferior es igual a  $\psi = 2\pi$ .

$$v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}$$
$$v_r = \frac{Q}{2\pi r} = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}$$
$$\phi = \frac{Q \ln r}{2\pi} = m \ln r$$



Fig. 3.15. – Fuente en un Punto  $P(x_1, y_1)$  (Milne Thomson, 1968)

Las líneas  $\phi$  constante son círculos concéntricos centrados en la fuente, y las líneas de  $\psi$  constante son líneas de  $\theta$  constante, o sea, de radio constante.

Puede verse que el flujo que sale de entre cualquiera de los radios  $\psi_1$ ,  $\psi_2$  cuyas direcciones son  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ , es igual a :

$$\partial Q = v_r r \partial \theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} r \partial \theta = \partial \psi$$

que es una relación entre Q,  $\psi$  establecida en la ecuación,  $\delta Q = \delta \psi$ 

En coordenadas cartesianas :

$$\phi = m \ln \sqrt{\left(x^2 + y^2\right)} = \frac{1}{2} m \ln \left(x^2 + y^2\right)$$
$$\psi = m \cdot tag^{-1} \left(\frac{y}{x}\right)$$

$$u = v_r \cos \theta = \frac{mx}{r^2} = \frac{mx}{x^2 + y^2}$$

109

Gráficos de Redes de Flujo

Capítulo III

$$v = v_r sen\theta = \frac{my}{r^2} = \frac{my}{x^2 + y^2}$$

Para la fuente en el punto  $P(x_1, y_1)$ , en la Fig 3.15 tenemos :

$$\phi = m \ln r' = \frac{1}{2} m \ln \left[ (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 \right]$$
(3.6)  

$$\psi = m\theta' = m \cdot tag^{-1} \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

Para un sumidero, el cual no es otra cosa que una fuente negativa, los valores de  $\phi$ ,  $\psi$  están dados por las ecuaciones (3.6) precedidas por el signo negativo.

#### Vórtice Irrotacional

Una configuración de flujo en la cual sus líneas de corriente son círculos concéntricos, se la conoce como vórtice circular. Si las partículas del fluido rotan o revolotean alrededor del centro del vórtice, se dice que es rotacional o forzado; si las partículas no rotan, el vórtice es irrotacional o libre. Este es el que consideraremos. Un ejemplo de tipo de vórtices es el huracán o tornado.



En el cálculo de la distribución de velocidad en el vórtice irrotacional se debe considerar el hecho de que la presión debido al efecto centrífugo varía radialmente, y de que la Ec. de Bernoulli se aplica a través de las líneas de corriente, o sea radialmente. Gráficos de Redes de Flujo

En la Fig. 3.16 la aceleración centrípeta  $\left(\frac{v_{\theta}}{r}\right)^2$  del elemento del fluido es igual a la presión

neta actuando radialmente hacia adentro, dividido para la masa. Si el área seccional media, del elemento del fluido en el plano normal al radio es **dA**, entonces :

$$\frac{Fuerza}{Masa} = \frac{dpdA}{\frac{\gamma}{g} dAdr} = \frac{dpg}{\gamma dr} = \frac{v_{\theta}^{2}}{r}$$

$$\therefore \frac{dp}{\gamma} = \frac{v_{\theta}^{2}}{gr} dr$$
(3.7)

La Ecuación de Bernoulli para flujo en un plano horizontal es :

$$\frac{p}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} = cons \tan te$$
$$\therefore \frac{dp}{\gamma} = -\frac{v_{\theta}dv_{\theta}}{g} = 0$$
(3.8)

De las Ecs. (3.7), (3.8) tenemos :

.....

$$\frac{v_{\theta}^{2}}{gr} dr + \frac{v_{\theta} \partial v_{\theta}}{g} = 0$$
  
$$\therefore v_{\theta} \cdot dr + r dv_{\theta} = 0$$

$$v_{\theta} \cdot r = C(cons \tan te)$$

La resistencia, K, del vórtice se define como :

$$K = 2\pi v_{\theta} r = 2\pi C$$

Siendo positiva en forma convencional, para flujo en sentido antihorario.

Debido a que el flujo no es radial, tenemos :

$$v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = 0$$

$$v_{\theta} = \frac{1}{r} \frac{d\phi}{d\theta} = -\frac{d\psi}{dr}$$

$$\therefore \phi = v_{\theta} r \theta = \frac{K}{2\pi} \theta$$

$$\psi = -\int v_{\theta} dr = -\int \frac{K}{2\pi r} dr = -\frac{K}{2\pi} \ln r$$

En la Fig. 3.17a, se ve una fuente con las líneas  $\phi$ ,  $\psi$  intercambiadas. Así como  $\psi$  en la fuente,  $\phi$  para el vórtice irrotacional es una función cíclica que debe tener un solo valor a lo largo del eje x positivo, siendo  $\phi = 0$  sobre la cara del eje, y  $\phi = K$  debajo de la cara.

En teoría de vórtice irrotacional la relación  $v_{\theta} r = C$  da lugar a que  $v_{\theta}$  se aproxime a infinito cuando r se aproxima a cero. En vórtices de fluidos reales despreciando los efectos de viscosidad, un filamento central del fluido rota casi como un sólido, y la velocidad,  $v_{\theta}$ , se incrementa linealmente con el radio, desde el valor cero en el eje, hasta la región exterior del filamento, donde ocurre la transición de distribución de velocidad rotacional a irrotacional, según la Fig 3.17b.



Fig. 3.17. – (a) Vórtice Irrotacional en el origen, (b) Vórtice Irrotacional con un núcleo con Vórtice Rotacional. (Applied Hydrodynamics, 1967)

#### Circulación

Es conveniente introducir el concepto de "circulación",  $\Gamma$  que es de mucha importancia en la teoría de aerofolios, bombas, turbinas, ventiladores. La circulación se la define como una integral de línea del vector velocidad alrededor de una curva cerrada dentro de un fluido.

El integral de línea L, del vector velocidad entre los puntos A y B de la figura 3.18a, es igual al integral del producto del elemento línea ds por la componente,  $V\cos\alpha$ , de la velocidad en la dirección de  $\partial s$ :

$$L_{AB} = \int_{A}^{B} V \cos \alpha \cdot ds$$

Gráficos de Redes de Flujo

Capítulo III



Fig. 3.18. - Línea Integral de Velocidad y Circulación.

Si la curva es cerrada (Fig. 3.18b), al integral de línea se lo conoce como Circulación :

$$\Gamma = \oint V \cos \alpha \cdot ds$$

Las dimensiones de  $\Gamma$  son pies<sup>2</sup> / seg.

La circulación calculada alrededor de una línea de corriente de un vórtice irrotacional mide la intensidad del vórtice, o sea :

$$\Gamma = v_{\theta} \oint ds = 2\pi r v_{\theta} = 2\pi C = K$$

la cual es independiente de r. Por lo tanto, la circulación alrededor de todas las líneas de corriente del vórtice es constante e igual a la resistencia del vórtice.

En la Fig. 3.17a, la trayectoria ABCD conformada por arcos y líneas radiales, es una curva para la cual la circulación es cero :

$$\Gamma_{ABCD} = L_{AB} + L_{BC} + L_{CD} + L_{DA}$$
$$= v_A r_A \alpha + 0 - v_D r_D \alpha - 0 = 0$$

por tanto vr es una constante para vórtice irrotacional.

# 4

# HIDRODINAMICA DE UN CUERPO MOVIENDOSE EN REGIMEN PERMANENTE.

## 4.1 CONSIDERACIONES GENERALES

Consideraremos el comportamiento del flujo de un fluido real (agua) cuando está influenciada por el movimiento de un cuerpo sólido sumergido (submarino). Se ha tomado un cuerpo sumergido para evitar la influencia de la superficie libre. Este cuerpo se mueve en régimen permanente.

Se asume que la región fluida es de grandes dimensiones con lo cual no hay necesidad de analizar las influencias de los límites de la región, o sea se trata de una región fluida infinita. Cuando se habla de región fluida infinita esto implica la no existencia de superficie libre y por tanto no habrán efectos de resistencia de ola.

Para caracterizar el fluido objeto de nuestro estudio haremos las siguientes consideraciones: es homogéneo, incompresible, y no se considerarán los efectos de temperatura. Adoptaremos un sistema de referencia coordenado fijo al cuerpo, de esta forma si el cuerpo posee movimiento rectilíneo y uniforme el fluido se moverá con una velocidad constante.



Fig. 4.1. - (a) Sistema de Referencia Fuera del Cuerpo; (b) Sistema de Referencia Fijo al Cuerpo.



Analizando lo que sucede cuando un flujo atraviesa un cilindro :

 $\Re$ <1. Flujo simétrico con respecto a x i y. No hay descolamiento. Esta situación es semejante al flujo en un medio fluido ideal.

1<92<30

Aparecen dos vórtices los mismos que están ubicados en la parte posterior del cilindro.

# 40<R<4000

En la región posterior del fluido aparecen vórtices alternados ubicados en forma más o menos ordenada. Estos son los vórtices conocidos como Karman-Vortex.

# $10^3 < \Re < 10^5$

En la región posterior del cilindro, el movimiento del fluido es completamente desordenado. Esta región de torbellinos se conoce como región de estela (wake) y se extiende hasta los puntos T aproximadamente.



Fig. 4.2 - Flujo a través de un cilindro.

La secuencia de figuras mostradas nos hacen ver como influye la viscosidad en el flujo. Del esquema anterior se deduce que cuando R<1 la configuración del flujo es idéntica a la del fluido ideal, y si adoptamos la teoría potencial tendremos :

$$f(Z) = U(Z + \frac{r_o^2}{Z})$$

donde  $Z = X + iY = re^{i\theta}$ 

 $w = \frac{df}{dZ}$ 

De acuerdo con el Teorema de Blasius la fuerza hidrodinámica actuante es nula, pues :

$$F = X + iY = \frac{i\rho}{2} \oint w^2 dZ = 0$$

donde

lo cual nos permite concluir que el modelo aproximado basado en la teoría potencial, adaptado para el análisis del flujo cuando  $\Re < 1$ , no es satisfactorio, debido a que existe realmente una fuerza hidrodinámica actuando sobre el fluido.

Esto se debe a que si  $\Re$  es pequeño, las fuerzas de origen inercial serán también pequeñas comparadas con las fuerza de origen viscoso que pueden ser despreciadas, pero, justamente la teoría potencial se ocupa del cálculo de las fuerzas de inercia y por este motivo resulta nula.

117

### Hidrodinámica en Régimen Permanente

La fuerza hidrodinámica actuando en el cilindro cuando  $\Re < 1$  resulta de la interacción existente entre las partículas fluidas debido a la existencia de viscosidad, y la definimos como :

## $R_f =$ fuerza de arrastre.

Si analizamos cada uno de los flujos esquematizados en la figura anterior obtendremos para cada caso, que la fuerza hidrodinámica medida será completamente diferente para cada flujo. Esto se debe a la siguientes razones :

- R<sub>f</sub> asume valores diferentes porque la parte del cilindro que no experimenta la separación es diferente en cada caso, y como R<sub>f</sub> es función del área en contacto directo con el fluido no separado, es de esperarse que sus valores sean diferentes.
- Debido a la separación del fluido surge una fuerza opuesta al movimiento que resulta del efecto de la presión sobre la superficie del cilindro. La separación (aumenta la velocidad) dará lugar a la formación de una zona de baja presión en la cara posterior del cilindro. A esta fuerza la denominaremos :

Fuerza de presión viscosa =  $R_{pv}$ 

Sin embargo, debemos notar que las fuerzas  $\mathbf{R}_{f}$  y  $\mathbf{R}_{pv}$  poseen un mismo origen viscoso y tenemos que :

Fuerza o resistencia viscosa =  $R_v = R_f + R_{pv}$ 

Analicemos ahora un hidrofoil. Si solo consideramos las fuerzas de origen viscoso, la fuerza de presión viscosa sería prácticamente nula, y solamente estaría actuando la fuerza de arrastre.



Fig. 4.3 - Líneas de corriente en torno a un hidrofoil con pequeño ángulo de incidencia.

X No ocurre el fenómeno de descolamiento.

Si al hidrofoil de la Fig. 4.3 se le inclina un cierto ángulo con relación al flujo, existiría la posibilidad de que ocurra el descolamiento con la consecuente aparición de  $\mathbf{R}_{pv}$ .

Por todo lo anterior podemos llegar a la siguiente relación :

$$R_{V} = R_{V}(U, \rho, \upsilon, l, p_{1}, p_{2}, ....)$$

donde:

I = longitud característica

 $p_1$ ,  $p_2$  = parámetros que definen la forma del cuerpo ( $\alpha$ , l/b, .....)

La fuerza de arrastre  $\mathbf{R}_{v}$  actúa oponiéndose al movimiento, o sea, en la dirección x, y sus componentes son las únicas fuerzas presentes para el caso del cilindro. Para el caso del hidrofoil aparece una fuerza normal al flujo.

Al analizar la figura del hidrofoil se observa que no existe simetría con respecto al eje, e interpretando el concepto de línea de corriente y con la ayuda de la ecuación de continuidad y del teorema de Cauchy-Bernoulli<sup>\*</sup> se deduce que esta fuerza debe tener el sentido de Y positiva. A esta fuerza la denominaremos :

L = fuerza de sustentación

Para la caracterización de esta fuerza, la forma del cuerpo desempeña una función importante, y podemos escribir :

$$L = L (\rho, U, I, p_1, p_2)$$

A continuación se presenta un cuadro que resume el tipo de fuerzas que actúan sobre un cuerpo moviéndose en régimen permanente en una región fluida infinita:



' Teorema de Cauchy-Bernoulli

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}v^2 + U + P = F(t)$$

Para un fluido ideal en un campo de fuerzas que derivan de un potencial  $\mathbf{v}$ , con velocidad que se deriva de un potencial  $\mathbf{\Phi}$ , existe una función  $\mathbf{F}(\mathbf{t})$  constante en cada instante para todo el fluido.

119

#### Hidrodinámica en Régimen Permanente

Es importante considerar :

- No obstante los razonamientos efectuados en términos de una teoría bidimensional, los resultados y conclusiones generales son válidos para el caso tridimensional.
- Al estudiar la teoría de la Ala aparecerá otra fuerza, la fuerza inducida, pero esta posee mecanismos idénticos a los de la fuerza tipo L.
- 3. La fuerza de empuje no fue incluida debido a que ésta es de origen hidrostático.

## 4.2 TEORIA POTENCIAL APLICADA AL ESTUDIO DE LA HIDRODINAMICA DE LOS CUERPOS.

De las fuerzas obtenidas anteriormente, podemos observar que solamente la fuerza de tipo L (sustentación) podrá ser analizada con la ayuda de la Teoría Potencial, las demás tienen como origen primario a la viscosidad, sin embargo, es importante introducir los conceptos de teoría potencial, no solo para analizar las fuerza de tipo L sino también como una introducción a casos que son completamente analizados usando esta teoría.

Consideremos un fluido ideal, o sea, no viscoso, incompresible, homogéneo, con flujo irrotacional

$$\nabla \times \vec{V} = 0$$

donde  $\vec{v} = (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$  define al campo de velocidades. Entonces existe una función,  $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$  potencial de velocidad que es único, de tal forma que :

$$\nabla \Phi(x, y, z) = V(x, y, z)$$

Consideremos ahora un flujo bidimensional. Si este flujo satisface las condiciones anteriores podemos asociar al flujo una Función Analítica<sup>\*</sup>, la misma que puede ser expresada por una serie de potencias convergentes, por ejemplo:

' Función Analítica

Sea Z una variable compleja  $\mathbf{Z} = \mathbf{X} + \mathbf{i}\mathbf{Y}$ , y  $\mathbf{w} = \mathbf{w}(\mathbf{Z})$  una función compleja

$$w(Z) = \Phi(x, y) + i\Psi(x, y)$$

Se dice que w es una función analítica si las Ecuaciones de Cauchy-Riemann son satisfechas, esto es

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y} ; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$$
  
Las funciones  $\Phi$ ,  $\Psi$  son conjugadas armónicas donde : 
$$\begin{cases} \nabla^2 \Phi = 0 \\ \nabla^2 \Psi = 0 \end{cases}$$
 en la región fluida

Nota : Si  $\mathbf{f} = \mathbf{u} + \mathbf{iv}$ , y  $\mathbf{f}$  es analítica entonces  $\mathbf{u}$ , v son armónicas y son llamadas conjugadas armónicas. Si  $\mathbf{u}$  es armónica :  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ 

por Ej :

$$f(Z) = \sum_{K=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^K$$

donde f(Z) : es llamada potencial complejo

 $Z = X + iY = re^{i\theta}$  : variable compleja definida en toda región fluida tal que :  $Re[(f(Z)] = \Phi(x, y) = potencial de velocidades$  $Im[(f(Z)] = \Phi(x, y) = función de corriente$ 

 $\frac{df(Z)}{dZ} = u - iv = \text{velocidad compleja}$ 

Según Cauchy-Riemann

$$\frac{df(Z)}{dZ} = \frac{d}{dZ}(\Phi + i\Psi) = \frac{\partial\Phi}{\partial x} + i\frac{\partial\Psi}{\partial x} = \frac{\partial\Psi}{\partial y} - i\frac{\partial\Phi}{\partial y}$$

El análisis de flujos potenciales en dos dimensiones se facilita grandemente con el uso de la variable compleja.

Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \qquad \qquad ; \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

de donde:

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \qquad \qquad v = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

## Condición Cinemática:

En la superficie que limita a la región fluida, la condición cinemática que debe ser satisfecha es que la componente normal de la velocidad relativa se anule, esto es, si :

F(x,y,z)=0

121

#### Hidrodinámica en Régimen Permanente

#### Capitulo IV

es la ecuación de la superficie, que puede ser inclusive la superficie del cuerpo, entonces :

$$v_n = \frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0$$
 en  $F(x, y, z) = 0$ 

lo que es equivalente a :

$$\frac{DF}{Dt} = 0 \qquad \text{en } F(x, y, z) = 0$$

donde  $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \Phi_x \frac{\partial}{\partial x} + \Phi_y \frac{\partial}{\partial y} + \Phi_z \frac{\partial}{\partial z}$  es la derivada sustantiva de una función

#### Conservación de masa:

Otra condición que debe satisfacer el flujo es el principio de la conservación de la masa :

 $\nabla \cdot \vec{V} = 0$  en la región fluida, o  $\nabla^2 \Phi = 0$  en la región fluida(Ec. de Laplace

Además, dentro de la teoría potencial se puede obtener la presión a partir del teorema de Cauchy-Bernoulli

$$\frac{p}{\rho} + gZ + \frac{1}{2} \left( \Phi_x^{2} + \Phi_y^{2} + \Phi_z^{2} \right) = cons \tan te$$

### 4.3 POTENCIAL DE VELOCIDADES.

Para analizar el flujo generado por el movimiento de un cuerpo y para el cálculo de las fuerzas hidrodinámicas, es necesario la determinación del potencial de velocidad.

Como la región fluida considerada es infinita y el cuerpo se mueve con velocidad constante U, según un sistema de coordenadas fijo al cuerpo, el potencial de velocidad estará dado de manera general por :

$$\Phi(x, y, z) = U_x + \varphi(x, y, z)$$

Capítulo IV

donde  $\varphi$  (x,y,z) = potencial de perturbación

La determinación de  $\Phi(x,y,z)$  se hará a través del problema de valor de contorno y de las relaciones :

Conservación de Masa  $\nabla^2 \Phi = 0$ , continuidad en la región fluida

$$\begin{vmatrix} \nabla \Phi | \to U \\ |\nabla \Psi | \to 0 \end{vmatrix} si \qquad r = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} \to \infty$$

Condición Cinemática

$$\frac{\mathrm{DF}}{\mathrm{Dt}} = 0$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \upsilon_n = 0$$

$$si \qquad F(x, y, z) = 0$$

condición particularizante

# 4.3.1 Cilindro de sección circular de radio = r<sub>o</sub>

- El potencial complejo de velocidad está dado por :

$$f(Z) = U\left(Z + \frac{r_0^2}{Z}\right)$$

de aquí se puede obtener el :

- Potencial de velocidad :

$$\Phi(x, y) = \Re e[f(Z)] = U_x + \frac{Ur_0^2 x}{x^2 + y^2}$$

Hidrodinámica en Régimen Permanente

Capítulo IV

- Función de corriente :

$$\Psi(x, y) = \Im m[f(Z)] = U_y - \frac{Ur_0^2 y}{x^2 + y^2}$$

- Velocidad compleja :

$$\omega(Z) = u - iv = \frac{df(Z)}{dZ} = U - \frac{r_0^2}{Z^2}$$

Las líneas de corriente se obtienen haciendo  $\Psi$  = constante y cuando  $\Psi$ =0 se obtiene la ecuación del contorno de cilindro

$$x^2 + y^2 = r_0^2$$

# 4.3.2 Cilindro de sección circular en presencia de vórtice : Radio = $r_0$

El potencial complejo será obtenido sumando los potenciales complejos de cada efecto:

$$f(Z) = U\left(Z + \frac{r_0^2}{Z}\right) + i\frac{\Gamma}{2\pi}\log\left(\frac{Z}{r_0}\right)$$

Existe una infinidad de diferentes flujos correspondientes a diferentes valores de

$$\frac{\Gamma}{Ur_0}$$
, donde  $\Gamma$  = circulación

Si  $\frac{\Gamma}{Ur_0} = 0$ , se obtiene el caso anterior.

A continuación se presentan esquemas de líneas de corriente para diversos valores de  $\frac{\Gamma}{Ur_0}$ 



Fig. 4.4. – Líneas de Corriente para diferentes  $\frac{\Gamma}{Ur_0}$ 

Cuando  $\Gamma \neq 0$  la simetría de las líneas de corriente no se mantiene con relación al eje x. La velocidad del fluido en la superficie del cilindro está dada por :

$$\nabla \Phi = \overrightarrow{V}$$
$$\therefore \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}\right)_{r=r_0} = -2USen\theta - \frac{\Gamma}{2\pi r_0}$$

siendo igual a cero cuando:

$$Sen\theta = -\frac{\Gamma}{4\pi Ur_o}$$

Los puntos de estagnación  $S_1$ ,  $S_2$  cuando  $\Gamma=0$ , sobre el eje x, se mueven a medida que  $\Gamma/Ur_o$  toma valores diferentes, explicados a continuación :

Hidrodinámica en Régimen Permanente

Para  $\Gamma/Ur_o > 4\pi$  la velocidad es diferente de cero en todos los puntos del cilindro, el punto de estagnación no pertenece al cilindro y su posición sobre la recta,  $\theta = -\pi/2$  se obtiene haciendo :

$$\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right)_{\theta=\frac{\pi}{2}}=0$$

desde que  $\partial \Phi / \partial r = 0$  sobre esta recta. El otro punto de estagnación está dentro del cilindro.

#### 4.3.3 Cilindro de Sección Circular en presencia de una Fuente.

En este caso haremos U = 0 y colocamos una fuente de intensidad  $\sigma$  a una distancia d sobre el eje de las x, siendo  $d > r_o = radio del cilindro$ . Para estas condiciones el potencial de velocidad compleja se expresa por :

$$f(Z) = \frac{\sigma}{2\pi} \ln \left( Z - d \right) + \frac{\sigma}{2\pi} \ln \left( Z - \frac{r_0^2}{d} \right) - \frac{\sigma}{2\pi} \ln Z$$

y debe satisfacer las condiciones de contorno.

A partir de este potencial complejo se pueden obtener el potencial de velocidad, la función de corriente, y el campo de velocidad. Analizando el potencial complejo es fácil identificar el primero y el segundo término como fuentes localizadas en  $x_1=d$  y  $x_2=r_0^2/d$ ; los puntos  $x_1$ ,  $x_2$  se conocen como puntos inversos o imágenes con relación a la circunferencia de radio  $r_0$ ; y el tercer término como un sumidero localizado en el origen.

El potencial complejo puede escribirse en la forma :

$$f(Z) = \frac{\sigma}{2\pi} \ln(Z - d) + \frac{\sigma}{2\pi} \ln\left(\frac{r_0^2}{Z} - d\right)$$

donde el primer término :

$$f_1(Z) = \frac{\sigma}{2\pi} \ln(Z - d)$$

representa una fuente en el punto  $x_1 = d$ ; y el segundo término es :

$$f_2(Z) = \frac{\sigma}{2\pi} \ln\left(\frac{r_0^2}{Z} - d\right) = \overline{f_1}\left(\frac{r_0^2}{Z}\right)$$

donde  $\overline{f_1}(Z) = \text{conjugada de } f_1(Z)$ 

$$f(Z) = Z \Rightarrow \overline{f}(Z) = Z$$

$$f(Z) = iZ \Longrightarrow f(Z) = -iZ$$

de ahí tenemos que :

$$f(Z) = f_1(Z) + f_1(r_0^2/Z)$$

La expresión anterior corresponde al Teorema del Círculo presentado por Milne-Thompson que dice: "Sea  $f_i(Z)$  el potencial complejo de un flujo bidimensional el cual no presenta singularidades cerca de la región de interés. Si un cilindro de sección circular de radio  $r_0$  es introducido en el potencial complejo, el flujo resultante está dado por :

$$f(Z) = f_1(Z) + \overline{f_1}(t_0^2/2)^{"}$$

# 5

# TEORÍA DE OLAS

El comportamiento de las olas y su generación constituyen uno de los problemas de la naturaleza más difíciles de entender.

Las olas pueden ser causadas por ciertas perturbaciones artificiales, tales como :

- Movimientos de embarcaciones,
- Explosiones,
- Movimientos terráqueos,
- \* Mareas y
- \* Vientos.

Las olas producidas por los vientos son las que interesan más a los ingenieros debido a que influyen en el diseño de estructuras marinas. Generalmente las olas causadas por las mareas son de poco interés a no ser que se trate de olas de tipo solitario o de crestas altas que ocurren en determinadas localidades.

# 5.1 FORMACIÓN Y GENERACIÓN DE OLAS.

Las olas se manifiestan en forma de ondulaciones superficiales que ocurren en intervalos periódicos, excepto cuando se tratan de olas de traslación y de olas solitarias u olas simples de traslación, que no presenta ninguna depresión debajo del nivel de agua tranquila.

La ola mantiene su forma hasta cierto calado y por tanto el calado del agua es un factor importante a considerar en el estudio de olas.

Capítulo V

## 5.1.1 Olas de Agua Profunda.

Son olas que ocurren en aguas que tienen un calado mayor que la mitad de la longitud de onda.

$$d > \frac{\lambda}{2}$$

A esta profundidad el fondo no afecta al movimiento de las partículas.

## 5.1.2 Olas de Agua Rasa

Son olas que ocurren en aguas que tienen un calado menor que la mitad de la longitud de la ola.

$$d < \frac{\lambda}{2}$$

A esta profundidad el fonfo afecta al movimiento de las partículas haciéndolas cambiar en su trayectoria o movimiento orbital desde la forma circular a elíptica. Ver fig. 5.1.

## 5.2 ROMPIMIENTO DE OLAS

Las olas rompen cuando la velocidad de avance de las partículas de la cresta exceden a la velocidad de propagación de la ola. En aguas profundas ocurre normalmente cuando la altura de la ola excede en 1/7 a la longitud de la ola. El ángulo que forma la cresta antes de romper es de aproximadamente 120°.

$$H_b > \frac{\lambda}{7}$$

En aguas rasas la ola rompe cuando el calado es igual a uno un cuarto de su altura

$$\frac{5}{4}H_b = d$$
$$H_b = \frac{4d}{5}$$

dependiendo de la resistencia del viento y de la condición del fondo.



Fig. 5.1. - Efecto del calado sobre la trayectoria de las partículas (a) Aguas profundas (b) Aguas intermedias (c) Aguas rasas (Mc Cormick Michael, 1973)

AGUA PROFUNDA	$\frac{1}{2} \le \frac{h}{\lambda} < \infty$
CALADO INTERMEDIO	$\frac{1}{20} < \frac{h}{\lambda} < \frac{1}{2}$
AGUA RASA	$0 < \frac{h}{\lambda} \le \frac{1}{20}$

## 5.3 VELOCIDAD DE LA OLA

La velocidad de una ola está definida por la siguiente ecuación :

$$v = \frac{\lambda}{T} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}} = \frac{gT}{2\pi}$$

Longitud de Ola

$$\lambda = \frac{2\pi v^2}{g} = \frac{gT^2}{2\pi}$$

Período de la Ola

$$T = \sqrt{\frac{2\pi\lambda}{g}} = \frac{2\pi\sigma}{g}$$

Donde, en las ecuaciones anteriores :

n = velocidad de propagación de la ola, pies / segundo  $\lambda$  = longitud de ola, o sea, la distancia entre dos crestas consecutivas de una ola, pies

- longitud de ola, o sea, la distancia entre dos crestas consecutivas de una ola, pies

 $T = período de la ola, o sea, el tiempo para que la ola recorra la longitud (<math>\lambda$ ), segundos

g = aceleración de la gravedad

Si una de las características anteriores es conocida, las otras pueden ser calculadas y sustituyendo los valores numéricos de las constantes  $\pi$  y g, tenemos :

 $v = 2.26\sqrt{\lambda} = 5.12T$  $L = 0.195v^2 = 5.12T^2$  $T = 0.442\sqrt{\lambda} = 0.195v$ 

Las relaciones anteriores se entenderán mejor si nos referimos a la Fig. 5.2, la cual muestra la configuración superficial de una ola en agua profunda del tipo oscilatoria trocoidal formada por partículas con trayectoria circular.

# Teoría de Olas

Capítulo V



- d calado de agua tranquila (rasa)
- H altura de ola
- a elevación de la cresta de la ola sobre el nivel de agua tranquila
- $\lambda$  longitud de ola
- h<sub>o</sub>\_altura entre el eje de rotación y el nivel de agua tranquila

Fig. 5.2. - Caracteristicas de una ola de agua profunda. (Mc Cormick Michael, 1973)

# 5.4 PREDICCIÓN DE ALTURA Y LONGITUD DE OLA

Las dimensiones de una ola para un lugar determinado dependen de la velocidad del viento, de la duración, de la dirección, del área sobre la cual actúa el viento y del calado del agua.

Stevenson, en 1864, estableció la primera fórmula que relaciona el fetch (F, en millas marítimas) y la altura de ola (H, en pies) :

$$H = 1.5 F$$

para fetchs grandes, mayores que 30 millas náuticas (F > 30 m.n.), y

$$H = 1.5\sqrt{F} + 2.5 - \sqrt[4]{F}$$

para fetchs pequeños, menores que 30 millas náuticas (F < 30 m.n.)

Molitor, en 1934, introduce la velocidad del viento como una variable y usa las millas estándar en lugar de las náuticas para las siguientes fórmulas :

 $H = 0.17\sqrt{UF}$ para F>20 millas $H = 0.17\sqrt{UF} + 2.5 - \sqrt[4]{F}$ para F<20 millas</td>

donde U = velocidad del viento en millas por hora F = fetch en millas  $H_0 =$  altura de ola en pies

Bretschneider, en 1947, determinó las siguientes fórmulas :

$$H_0 = 0.0555 UF^{0.5}$$

$$T = 0.5U^{0.5}F^{0.25}$$

donde U = velocidad del viento en millas por hora
 F = fetch en millas náuticas
 Ho = altura de la ola; correspondiente a la altura de ola significativa en agua
 profunda.

Bretschneider y Reid propusieron la siguiente fórmula, para encontrar la altura de la ola a un cierto calado d.

$$H = H_0 K_s \left[ \frac{fH_0}{mT^2} \int_{\infty}^{\#} \Phi_f \delta\left(\frac{d}{T^2}\right) + 1 \right]^{-1}$$

donde

H altura de la ola en calado d = altura de la ola en agua profunda Ho = Ks factor shoaling (poca profundidad) == f factor fricción = pendiente del fondo m - $\Phi_{\rm f}$ función de Ks y d/L =

# Teoría de Olas

La fórmula anterior es más completa porque toma en cuenta el hecho de que las olas generadas en aguas profundas posteriormente se mueven en aguas rasa sin que el viento actúe sobre ellas. En este caso la fricción del fondo tiende a reducir la altura de la ola, y el efecto de la poca profundidad tiende a incrementar la altura de la ola. Como las olas se mueven en aguas poco profundas la energía de la ola está confinada en aguas con poco calado que continua decreciendo. La cantidad de agua sobre la que actúa la energía es muy pequeña, entonces la energía por partícula de agua incrementa e igualmente la altura de la ola crece. En otras palabras, la fricción en el fondo se incrementa cuando el calado del agua disminuye.

# 5.5 CLASIFICACION DE LAS OLAS

Las olas pueden clasificarse de varias maneras :

1 Ola sinusoidad, es aquella que presenta una forma simétrica respecto a la cresta y seno, según se muestra en la (fig. 5.3)



Fig.5.3 Ola sinusoidal

2 Ola trocoidal, es aquella que presenta una variación en su forma, tiene una cresta aguda y angosta, y un seno relativamente ancho, según se ve en la (fig. 5.4)



Fig. 5.4 Ola trocoidal
Desde el punto de vista del movimiento horizontal del perfil de la ola, podemos clasificarlas como :

- 1 Ola progresiva, es aquella que se mueve horizontalmente con relación a la superficie del agua.
- 2 Ola estacionaria, es aquella ola que se mantiene oscilante arriba y abajo y no se mueve en sentido transversal.

En el caso de OLAS SINUSOIDALES la elevación de la ola puede ser definida como un movimiento armónico simple y descrita analíticamente como :

$$\zeta = \zeta_a Sen \omega_w t$$

o más generalmente

$$\zeta = \zeta_a Sen(\omega_w t + \varepsilon)$$

donde

=	amplitud de la ola
=	fase del ángulo que eleva a la curva a lo largo del eje t
=	frecuencia circular de la ola
=	medida de tiempo
	8 8 8

Lo anterior se ilustra en la Fig. 5.5.



Fig. 5.5 Ola sinusoidal en función del radio vector. (Bhattacharyya, R., 1987)

## 5.5.1 Ola Progresiva.

Consideramos una ola simple sinusoidal que avanza a una velocidad  $V_w$ , esto es, una ola que puede ser representada por una curva Seno o Coseno como se muestra en la Fig. 6.6.



Fig. 5.6. - Representación de una ola Seno (o Coseno). (Bhattacharyya, R., 1987)

La ecuación de esta curva es la siguiente :

$$\zeta = \zeta_a Sen(kx) \tag{5.1}$$

donde  $\mathbf{k} = 2\pi \lambda_{w}$  número de ola. Por tanto :

$$\zeta = \zeta_a Sen\left(\frac{2\pi}{\lambda w}x\right) \tag{5.2}$$

La curva descrita es una ola estacionaria.

Consideremos ahora una ola progresiva asumiendo que la curva punteada de la Fig. 5.6 es la nueva posición de la ola después de un tiempo t, en segundos, y cuya ecuación es :

$$\zeta = \zeta_a Sen\theta$$

donde :  $\theta \Rightarrow$  contiene a x

136

ó

## Capítulo V

Analizando la figura tenemos :

Cuando  $\theta = 0$   $x = V_w t$  t = 0t = 0  $\theta = kx$ 

lo anterior se cumple solo si :

$$\theta = k(x - V_w t) \qquad ; \qquad k = \frac{2\pi}{\lambda_w} k$$
$$\theta = \frac{2\pi}{\lambda_w} (x - V_w t)$$

Entonces la Ecuación de una ola sinusoidal viajando a velocidad  $V_w$  en la dirección positiva de x, esta dada por :

$$\zeta = \zeta_a Sen \frac{2\pi}{\lambda_w} (x - V_w t)$$
 (5.3)

Esta ecuación también puede expresarse en términos de la frecuencia de la ola  $\omega_w$ .

Después de un tiempo T, el valor de  $\zeta$  para x = x<sub>o</sub> está dado por la expresión :

$$\zeta = \zeta_a Sen(kx - 2\pi)$$

y para un tiempo t cualquiera será :

$$\zeta = \zeta_a Sen(kx - \frac{2\pi t}{T})$$

pero

$$\omega_{w}t = 2\pi t/T$$

entonces  $\zeta = \zeta_a Sen(kx - \omega_w t)$  (5.4)

donde  $\delta =$ ángulo de fase cualquiera

Capitulo V

Si observamos una ola pasando por un punto fijo sobre la superficie libre, x y kx son constantes. Podemos asumir que :

$$\beta = kx + \delta$$

entonces la ecuación general del movimiento de la ola será :

$$\zeta = \zeta_a Sen(-\omega_w t + \beta)$$
$$\zeta = -\zeta_a Sen(\omega_w t - \beta)$$

#### Velocidad, Longitud y Período de Ola

ó

Sin hacer restricciones sobre el calado con relación a la longitud de ola, se han estudiado las olas sinusoidales y se ha encontrado que la velocidad (conocida como velocidad de fase o celeridad) puede expresarse de la siguiente forma :

$$V_{w} = \frac{g\lambda_{w}}{2\pi} tanh \frac{2\pi h}{\lambda_{w}}$$

donde

 $V_w =$  velocidad o celeridad de onda  $\lambda_w =$  longitud de onda h = calado del agua

Si 
$$\frac{h}{\lambda_w} \to 0$$
  $tanh \frac{2\pi h}{\lambda_w} \to \frac{2\pi h}{\lambda_w} = kh$ 

y se obtiene que :

$$V_w = \sqrt{gh}$$
 AGUA RASA

esto significa que en aguas poco profundas todas las olas viajan con la misma velocidad, independientemente de sus longitudes de onda.

En cambio cuando  $\frac{h}{\lambda_w} \rightarrow$  grande, tenemos que:

$$V_w = \frac{g \lambda_w}{2\pi} \qquad \text{AGUA PROFUNDA}$$

esta ecuación demuestra que en agua profunda las olas se propagan a una velocidad que depende de sus longitudes de ola.

## **Ejemplo:**

Una ola en agua profunda tiene las siguientes dimensiones

.

 $\lambda_w = 20$  pies  $\zeta_a = 1$  pie [amplitud]

Encontrar la velocidad y el perfil de la ola a diferentes intervalos de tiempo t = 0, t = 0.1, t = 0.2, t = 0.3 y t = 1 segundo.

## Solución :

Velocidad :

$$V_{w} = \frac{gL_{w}}{2\pi} = \frac{32.2 \times 20}{2 \times \pi} = 10.1 \frac{\text{pies}}{\text{seg}}$$
$$\zeta = \zeta_{a} Sen \frac{2\pi}{\lambda_{w}} (x - V_{w}t)$$

Perfil :

Calculando obtenemos la siguiente tabla:

t = 0		t = 0.1		t = 0.2		t = 0.3		t = 1.0	
X (pies)	ζ (pies)								
0	0.00	1	0.00	0	-0.59	3	0.00	0	0.00
2	0.59	3	0.59	2	0.00	5	0.59	2	-0.59
4	0.97	5	0.97	4	0.59	7	0.97	4	-0.97
5	1.00	6	1.00	6	0.97	8	1.00	5	-1.00
6	0.97	7	0.97	7	1.00	9	0.97	6	-0.97
8	0.59	9	0.59	8	0.97	11	0.59	8	-0.59
10	0.00	11	0.00	10	0.59	13	0.00	10	0.00
12	-0.59	13	-0.59	12	0.00	15	-0.59	12	0.59
14	-0.97	15	-0.97	14	-0.59	17	-0.97	14	0.97
15	-1.00	16	-1.00	16	-0.97	19	-0.97	15	1.00
16	-0.97	17	-0.97	17	-1.00	21	-0.59	16	0.97
18	-0.59	19	-0.59	18	-0.97	23	0.00	18	0.59
20	0.00	21	0.00	20	-0.59			20	0.00





Fig. 5.7. - Propagación de una ola Senoidal

Como se mencionó antes la longitud de onda se la mide entre las crestas sucesivas o dos senos. Si Tw es el tiempo requerido por una partícula de una cierta cresta para alcanzar la próxima cresta, entonces :

$$\lambda_{\mathbf{w}} = \mathbf{V}_{\mathbf{w}} \mathbf{T}_{\mathbf{w}}$$

donde

λw

longitud de ola

1

 $V_w =$  velocidad de ola  $= \sqrt{g\lambda_w/2\pi}$ Tw período de la ola =

$$T_w = \sqrt{\frac{2\pi\lambda_w}{g}}$$

 $T_w = 0.442\sqrt{\lambda_w}$  en fps unidades (pies, libras, segundos) en unidades cgs (centímetros, gramos, segundos)  $T_w = 0.800 \sqrt{\lambda_w}$ 

## 5.5.2 Ola Estacionaria.

Las olas estacionarias se forman por la superposición de dos trenes de olas de igual amplitud viajando en sentido contrario.

Analíticamente una ola estacionaria puede representarse en forma simplificada como la suma de dos olas senoidales  $\zeta_1$  y  $\zeta_2$  viajando en direcciones opuestas :

$$\zeta_{1} = \zeta_{a} Sen \omega_{w} (t - \frac{x}{V_{w}})$$

$$\zeta_{1} = \zeta_{a} Sen \omega_{w} (t + \frac{x}{V_{w}})$$

$$\zeta = \zeta_{1} + \zeta_{2}$$

$$\zeta = \zeta_{a} Sen \omega_{w} (t - \frac{x}{V_{w}}) + \zeta_{a} Sen \omega_{w} (t + \frac{x}{V_{w}})$$

$$\zeta = (2\zeta_{a} Cos \frac{2\pi x}{\lambda_{w}}) Sen \omega_{w} t$$

Para estas olas los nodos o puntos de amplitud cero se los obtiene haciendo

$$Cos \frac{2\pi x}{\lambda_{w}} = 0$$

y la distancia entre nodos está dada por :

$$d=\frac{\lambda_w}{2}$$

#### Ejemplo:

Tenemos una ola con 
$$\lambda_{w} = 20$$
 pies  
 $\zeta_{a} = 0.25$  pies  
 $\omega = \pi$ 

Encontrar la elevación de la ola estacionaria para los tiempos t = 0, t = 0.2, t = 0.4, t = 0.5 seg.

Solución:

$$\zeta = (2\zeta_a \cos \frac{2\pi x}{\lambda_w}) Sen\omega_w t$$
$$\zeta = 2 \times 0.25 \times \cos \frac{2\pi x}{20} \times Sen \pi t$$

 $\zeta = 0.5 \times Cos \ 0.1 \ \pi \ \mathbf{x} \times Sen \ \pi \ t$ 

Calculando obtenemos la siguiente tabla :

t = 0		t = 0.2	t = 0.4	t = 0.5
x (pies)	ζ (pies)	ζ (pies)	ζ (pies)	ζ (pies)
0	0	0.29	0.48	0.59
2	0	0.24	0.39	0.41
5	0	0.00	0.00	0.00
8	0	-0.24	-0.39	-0.41
12	0	-0.24	-0.39	-0.41
15	0	0.00	0.00	0.00
18	0	0.24	0.39	0.41
20	0	0.29	0.48	0.50

## Efecto del Calado

El radio de la órbita de una partícula en agua profunda decrece rápidamente con respecto a su calado. Esto se expresa analíticamente como :

$$\frac{\zeta_z}{\zeta_a} = e^{-kz}$$

donde

 $\zeta_z$  = amplitud de la ola a cierto calado  $\zeta_a$  = amplitud de la ola en la superficie z = calado medio de la partícula con respecto a la superficie k = número de ola =  $\frac{2\pi}{\lambda_w}$ 

142

Capítulo V

Capítulo V

entonces, de lo anterior tenemos :

$$\frac{\zeta_z}{\zeta_a} = e^{-\left[\left(\frac{2\pi}{\lambda_x}\right)^z\right]}$$

La expresión del perfil de la ola a cualquier calado está dado por :

$$\zeta = \zeta_z Cos \, k(x - V_w t)$$
$$\zeta = \zeta_a e^{-kz} Cos \, k(x - V_w t)$$

#### Velocidad de las Partículas

La velocidad de las partículas en el sentido horizontal y vertical está dado por :

$$u = k\zeta_a V_w e^{-kz} Cos \ k(x - V_w t)$$
 dirección horizontal  
$$v = k\zeta_a V_w e^{-kz} Sen \ k(x - V_w t)$$
 dirección vertical

## 5.6 PRESIÓN DE LA OLA

Para muchos problemas el aspecto más importante de las olas es la distribución de presión debajo de la superficie. La presión en cada punto de la ola, en agua de cualquier calado, es igual a :

$$p = \rho g (z - \zeta)$$

donde z = se mide hacia abajo de la línea de agua tranquila

 $\zeta$  = es la elevación de las líneas de igual presión de la ola, siendo positiva o negativa, según el perfil de la ola, sea cresta o seno, y se la expresa como:

$$\zeta = \zeta_a \frac{\cosh k(-z+h)}{\cosh kh} \cos k(x-V_w t)$$

donde h = calado del agua

Capítulo V

Para aguas profundas tenemos :

$$\zeta = \zeta_a e^{-kz} Cos \, k(x - V_w t)$$

#### Energía de la Ola

La propagación de las olas se debe esencialmente a dos cosas :

- 1. La inercia del fluido
- 2. La gravedad, la cual tiende a mantener la superficie como un plano horizontal.

Un sistema de olas posee por lo tanto, energía cinética y energía potencial. La energía cinética se debe al hecho de que la partícula de agua tiene un movimiento orbital, y la energía potencial se debe a la elevación del agua sobre el nivel del mar.

Para una ola sinusoidal la Energía POTENCIAL está dada por :

$$\overline{E}_{\rho} = \frac{1}{4} \rho g \zeta_a^2 \lambda_w \qquad \text{por pie de ancho}$$

o por

por unidad de área de la superficie del agua

Similarmente la Energía CINETICA puede expresarse como :

$$E_k = \frac{1}{4} \rho g \zeta_a^2$$
 por unidad de área de superficie del agua

La Energía TOTAL para una ola sinusoidal es igual a :

 $E_p = \frac{1}{4} \rho g \zeta_a^2$ 

$$\overline{E} = \frac{1}{2} \rho g \zeta_a^2 \lambda_w \qquad \text{por pie de ancho}$$

y la energía total por unidad de área será igual a :

$$E = \frac{1}{2} \rho g \zeta_a^2$$

## 5.7 EMBARCACIÓN EN OLAS

El período absoluto de las olas no es igual al período de las olas encontradas por una embarcación durante su viaje. Un buque avanzando directamente sobre las olas encuentra olas sucesivas en forma mucho más rápida y las olas aparecerán con un período mucho más corto. El período de las olas encontradas por un buque se lo conoce como el "período de encuentro"  $T_e$ , el cual es función del período absoluto de la ola, de la velocidad de la embarcación y del ángulo entre la dirección del movimiento de la ola y la dirección en la que se mueve la embarcación.

El período de encuentro  $T_e$  (o la frecuencia de encuentro  $\omega_e = 2\pi / T_e$ ) es importante ya que nos dice como la embarcación encuentra a las olas y como estas afectan al movimiento de la nave.

El "ángulo de encuentro",  $\mu$ , se lo mide en el sentido de las agujas del reloj a partir de la dirección del movimiento de la ola.

Cuando una nave está avanzando hacia un tren de olas regulares, el ángulo se considera igual a  $180^{\circ}$ , como se ve en la Fig. 5.8. También se observan ángulos de encuentro para valores de  $0^{\circ}$  y 90°.



Fig. 5.8. - Definición de ángulos de encuentro. (Bhattacharyya, R., 1987)

Para encontrar la "Frecuencia de encuentro", We, cuando un barco está viajando con un ángulo µ,

Capítulo V

## Teoría de Olas

conocemos:

λw	=	longitud de la ola
V.	=	velocidad de la ola
V	=	velocidad del buque

Componentes de V :

 $V_1 = V \cos \mu \implies$  en la dirección de las olas

 $V_2 = V_w - V \cos \mu \Rightarrow$  velocidad relativa del buque con respecto a las olas

Tiempo requerido por el buque para viajar desde una cresta hasta la siguiente; o "**período** de encuentro":

$$T_e = \frac{\lambda_w}{V_w - V \cos \mu}$$
$$\lambda_w = V_w T_w$$
$$T_e = \frac{V_w T_w}{V_w - V \cos \mu} = \frac{T_w}{1 - \left(\frac{V}{V_w}\right) \cos \mu}$$

Cuando un buque está navegando en sentido contrario al de las olas el Cos  $\mu$  es negativo, entonces :

$$T_e = \frac{2\pi}{\omega_e} = \frac{\frac{2\pi}{\omega_w}}{1 - \left(\frac{V}{V_w}\right) \cos \mu}$$

donde:  $\omega_w$  = frecuencia circular de las olas

$$\omega_w = \frac{2\pi}{T_w}$$

entonces, la frecuencia circular de encuentro es igual a :

$$\omega_e = \omega_w \left( 1 - \frac{V}{V_w} \cos \mu \right)$$

También tenemos que :

 $V_w = g / \omega_w$ 

entonces la relación entre la frecuencia de encuentro y la frecuencia de la ola es :

$$\omega_e = \omega_w \left( 1 - \frac{\omega_w V}{g} \cos \mu \right)$$

## NOTA

1.- Cuando  $\mu = 90^{\circ} \Rightarrow \cos \mu = 0$ , entonces  $\omega_e = \omega_w$ 

2.- Longitud de ola efectiva

$$(\lambda_w)_e = \frac{\lambda_w}{\cos \mu}$$

según la Fig. 5.9.



Fig. 5.9. Barco moviéndose en un tren de olas regulares. (Bhattacharyya, R., 1987)

#### Ejemplo :

Un barco de 500 pies de eslora navegando a través de un tren de olas regular a un ángulo de 40° con respecto a la línea de las crestas. La proa del buque encuentra olas sucesivas cada 15 seg. y una cresta de ola tarda 10 seg. en pasar desde la proa hasta la popa del buque. Encontrar la velocidad del buque.

#### Solución :

 $\mu = 90^{\circ} - 40^{\circ} = 50^{\circ}$ 

Componente de V en la dirección de la ola :

 $V = V \cos \mu$ 

Velocidad relativa del buque con respecto a la olas en la dirección de movimiento de las olas es :

Si t es el tiempo que demora una cresta para pasar desde la proa hasta la popa, entonces :

$$t = \frac{\text{Longitud de encuentro}}{\text{Velocidad relativa del buque con respecto a las olas}}$$
$$t = \frac{L \cos \mu}{V_w - V \cos \mu} = 10 \text{seg.}$$
$$(V_w - V \cos \mu) \times 10 = 500 \text{Cos } \mu$$
$$(V_w - V \cos \mu) \times 10 = 321.5 \text{ pies}$$
$$V_w - V \cos \mu = 32.15 \text{ pies}$$

Si  $T_e$  es el intervalo de tiempo sucesivo, entre crestas observadas en las porciones de proa y popa perpendiculares al avance de la ola, entonces :

Período de encuentro =  $T_e = \frac{\text{Longitud de ola}}{\text{Velocidad relativa del buque respecto a las olas}}$ 

$$T_e = \frac{\lambda_w}{V_w - V \cos \mu} = 15 seg.$$

$$\lambda_w = T_e (V_w - V \cos \mu)$$
  
 $\lambda_w = 482.25 \text{ pies}$ 

Entonces :

$$V_{\rm w} = \sqrt{\frac{g\lambda_{\rm w}}{2\pi}}$$
  
V\_{\rm w} = 49.71 pies/seg.

Velocidad relativa = 
$$V_w - V \cos \mu = 32.15 \, pies$$
  
-  $V \cos \mu = 32.15 - 49.71$   
-  $V \cos \mu = -17.56$   
-  $V = \frac{-17.56}{Cos \, 50^{\circ}}$   
V = 27.31 pies/seg  
.  
V = 16. 171 nudos

# 6

## MOVIMIENTO DE FLUIDOS: MODELOS MATEMATICOS

Los modelos matemáticos tienen el carácter de aproximados con relación a la situación real y serán deducidos enfatizando su significado físico.

El fluido real está compuesto por moléculas con espacios vacíos entre ellas, sin embargo, cuando se trabaja con modelos matemáticos es conveniente admitir que el fluido es un medio continuo.

La formulación de modelos matemáticos parte de la deducción de las ecuaciones básicas del fluido en forma integral, para un determinado volumen de control, y luego, se obtienen las ecuaciones diferenciales del flujo aplicando las ecuaciones integrales a un volumen elemental.

Existen cinco variables básicas en un flujo, tres componentes de velocidad y dos propiedades termodinámicas; por tanto existirán cinco ecuaciones básicas que describen a un flujo, que son: tres componentes de la ecuación de cantidad de movimiento, la ecuación de continuidad y la ecuación de energía. La ecuación de energía no se toma en cuenta cuando el fluido es incompresible porque la masa específica es constante.

Cualquier par de propiedades termodinámicas, tales como, presión, temperatura, masa específica, entalpía, entropía, etc., son suficientes para determinar el estado y de esta forma las demás propiedades del fluido.

En el caso de flujo turbulento la situación es más compleja y no es posible desarrollar un sistema completo de ecuaciones.

## **6.1 ECUACIONES INTEGRALES**

El estudio del movimiento de un fluido se basa en las siguientes leyes básicas :

- 1.- Conservación de la masa
- 2.- Segunda Ley de Newton aplicada al movimiento
- 3.- Conservación de la Energía
- 4.- Segunda ley de la Termodinámica

Estas leyes se aplican a una cantidad fija de materia que mantiene su identidad al experimentar un cambio de estado, y no pueden ser aplicadas hasta que se identifique un sistema definido de materia.

En general no es conveniente identificar y seguir a porciones fijas de materia en el análisis del movimiento del fluido; es mejor primero adoptar un punto de vista teórico del campo e identificar una región definida fija o un volumen en el espacio llamado volumen de control. Las leyes básicas mencionadas no se aplican a volúmenes fijos sino a cantidades fijas de materia.

El estudio se inicia con la deducción de ecuaciones que se apliquen a volúmenes de control de expresiones conocidas. Luego se desarrollan las ecuaciones integrales del movimiento del fluido en forma detallada, con la finalidad de comprender mejor su aplicación a las situaciones físicas. Los métodos de deducción de las ecuaciones del volumen de control, a partir de las leyes básicas conocidas, siguen una metodología general, con ligeras modificaciones debido a las diferentes cantidades físicas. Una vez desarrolladas las ecuaciones, éstas serán aplicadas a la solución de problemas físicos que ocurren en el movimiento del fluido.

#### 6.1.1.- Conservación de Masa

Consideremos, en la Fig. 6.1, cierta cantidad de materia en determinado instante t, encerrada por la línea continua. En un instante posterior  $t+\Delta t$ , el contorno del sistema tiene una nueva localización física representada por la línea punteada.

Capítulo VI



Fig. 6.1. - Sistema Moviéndose a Través de un Volumen de Control. (Hughes, W.F., 1974)

Considerando las regiones indicadas por A, B, C tenemos al sistema ocupando la región A en el instante t, y en t+ $\Delta$ t el sistema ocupa las regiones B y A-C.

Sea m la masa contenida en las diferentes regiones, y en instantes diferentes, tendremos :

$$m_A(t) = m_A(t + \Delta t) - m_c(t + \Delta t) + m_B(t + \Delta t)$$

reordenando y dividiendo por  $\Delta t$ :

$$\frac{m_{A}(t+\Delta t)-m_{A}(t)}{\Delta t}=\frac{m_{c}(t+\Delta t)-m_{B}(t+\Delta t)}{\Delta t}$$

tomando el límite cuando  $\Delta t \rightarrow 0$ , el primer miembro queda :

$$\frac{\lim_{\Delta t \to 0} \frac{m_A(t + \Delta t) - m_A(t)}{\Delta t} = \frac{\partial}{\partial t} (m)_{v,c}$$
$$= \frac{\partial}{\partial t} \int_{v,c} \rho dv$$

donde p : masa específica

v : volumen

v.c. : volumen de control fijo en el espacio y limitado por la superficie de control S.C.

El segundo miembro de la ecuación queda :

$$\lim_{\Delta t \to 0} \left\{ \frac{m_{c}(t + \Delta t)}{\Delta t} - \frac{m_{B}(t + \Delta t)}{\Delta t} = m_{e} - m_{s} \right\}$$
$$\dot{m}_{e} - \dot{m}_{s} = \int_{Ae} \rho V \cos \alpha dA - \int_{As} \rho V \cos \alpha dA$$
$$= -\int_{sc} \rho V dA$$

donde  $m_e - m_s$ : representan los flujos (caudal) que entran y salen en el volumen de control.

V : vector velocidad.

 $\alpha$ : ángulo entre el vector velocidad y la normal.

Entonces, la ecuación de continuidad para el volumen de control queda :

$$= \int_{sc} \rho V dA = -\frac{\partial}{\partial t} \int_{v.c.} \rho dv \qquad (6.1)$$

Esta última ecuación es la forma integral de la ecuación de continuidad, y físicamente significa que el flujo (caudal) en masa hacia afuera de la superficie de control es igual al decremento de masa en el interior del volumen de control, por unidad de tiempo.

Examinaremos esta ecuación considerando algunas simplificaciones :

- Como el volumen de control es fijo, el segundo miembro de la ecuación es nulo para el caso de régimen permanente, donde  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ , resultando :

$$\int_{sc} \rho V dA = 0$$

- Para flujo incompresible tenemos :

$$\int_{sc} V dA = 0$$

Capítulo VI

#### Ejemplo:

En la Fig. 6.2 :



Fig. 6.2 Continuidad en derivaciones de flujo.

Considerando flujo permanente, donde el fluido entra por la sección 1 y sale a través de las secciones 2, 3 tenemos :

$$\int_{x_c} \rho V dA = 0$$
$$\int_{A_2} \rho V dA + \int_{A_3} \rho V dA + \int_{A_1} \rho V dA = 0$$

admitiendo que la velocidad es normal a todas las superficies por donde pasa el fluido, tenemos :

$$\int_{A_2} \rho_2 V_2 dA + \int_{A_3} \rho_3 V_3 dA - \int_{A_1} \rho_1 V_1 dA = 0$$

Si las masas específicas y las velocidades son uniformes en sus respectivas áreas, tenemos:

$$\rho_2 V_2 A_2 + \rho_3 V_3 A_3 - \rho_1 V_1 A_1 = 0$$

Para una tubería simple, sin la tercera salida, la ecuación anterior queda :

$$\rho_2 V_2 A_2 = \rho_1 V_1 A_1$$

Para llegar a esta última ecuación se han considerado las siguientes premisas :

- (a) Flujo permanente
- (b) Velocidades normales a las superficies
- (c) Velocidad y masa específica constantes a lo largo de las áreas respectivas, y
- (d) Una entrada y una salida para el volumen de control.

## 6.1.2.- Cantidad de Movimiento

Primero se deduce la ecuación de cantidad de movimiento para el volumen de control, que nos permitirá tratar problemas que envuelvan fuerzas de fluidos sobre superficies sólidas y sobre otros fluidos; como la fuerza sobre una curva, el empuje de un motor a jet, la sustentación y resistencia en una ala de avión, etc.

La fuerza resultante F que actúa sobre una partícula o sistema de partículas de masa fija está dada por la Segunda Ley de Newton :

$$F = \frac{dM}{dt} \tag{6.2}$$

donde : M, cantidad de movimiento lineal total del sistema.

Si asumimos que la fuerza sea constante en el instante  $\Delta t$ , podemos escribir :

$$F\Delta t = \Delta M$$

El segundo miembro de esta ecuación es, refiriéndonos a la Fig. 6.1 :

$$\Delta \boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}_{A}(t + \Delta t) - \boldsymbol{M}_{C}(t + \Delta t) + \boldsymbol{M}_{B}(t + \Delta t) - \boldsymbol{M}_{A}t$$

reordenando y dividiendo para  $\Delta t$ , tenemos :

$$\frac{\Delta M}{\Delta t} = \frac{M_A(t+\Delta t) - M_A(t)}{\Delta t} + \frac{M_B(t+\Delta t) - M_C(t+\Delta t)}{\Delta t}$$
(6.3)

155

tomándose el límite cuando  $\Delta t \rightarrow 0$ , el primer término del segundo miembro de (6.3) queda :

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{M_{A}(t + \Delta t) - M_{A}(t)}{\Delta t} = \frac{\partial}{\partial t} (M)_{V.C.} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V.C.} \rho V dv$$

y el segundo miembro queda :

$$= \frac{\lim_{\Delta t \to 0} \left[ \frac{M_{B}(t + \Delta t) - M_{C}(t + \Delta t)}{\Delta t} \right]}{\Delta t}.$$

$$= \frac{\lim_{\Delta t \to 0} \left\{ \frac{\left[ \sum_{B} \Delta M(t + \Delta t) \right]_{B}}{\Delta t} - \frac{\left[ \sum_{C} \Delta M(t + \Delta t) \right]_{C}}{\Delta t} \right\}}{\Delta t}$$

$$=\sum_{B}\Delta \dot{M} - \sum_{C}\Delta \dot{M} = \left[\sum\Delta \dot{m}V\right]_{s} - \left[\sum\Delta \dot{m}V\right]_{e} = \int_{S.C.}V\rho V dA$$

donde:

 $\sum_{B} \Delta M(t + \Delta t):$  es la ecuación de movimiento asociada a la masa que cruzó el contorno en la región **B** en el instante  $\Delta t$ .

contorno en la region **B** en el instante  $\Delta t$ .

 $\sum_{B} \Delta M$ : es la tasa en el tiempo, de la cantidad de movimiento que cruza la superficie en la región **B** en el instante **t**.

De esta forma la ecuación :

## $F\Delta t = \Delta M$

queda :

$$F = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} V \rho dv + \int_{SC} V \rho V dA$$

La fuerza total F está compuesta por la fuerza total de contacto (presión o cizallamiento), y una fuerza de campo B por unidad de volumen, por tanto, la ecuación de cantidad de movimiento para el volumen de control queda :

Capítulo VI

$$F_{S} + \int_{V.C} B dv = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V.C} V \rho dv + \int_{S.C} V \rho V dA$$
(6.4)

Esta ecuación es válida para el caso de ejes móviles sin aceleración, que es la forma usual en la que se mantiene la Ley de Newton.

Para el caso de régimen permanente y fuerzas de campo despreciables, la ecuación (6.4) queda :

$$\boldsymbol{F}_{S} = \int_{SC} \boldsymbol{V} \rho \boldsymbol{V} d\boldsymbol{A}$$

Además, si admitimos que la masa específica y la velocidad son uniformes a lo largo de las áreas en que el fluido cruza a la superficie de control, para una entrada 1 y una salida 2, tenemos :

$$\sum F_{x} = m(V_{x2} - V_{x1})$$

$$\sum F_{y} = m(V_{y2} - V_{y1})$$

$$\sum F_{z} = m(V_{z2} - V_{z1})$$

#### 6.1.3.- Cantidad de Movimiento Angular.

Tenemos que:

$$\boldsymbol{F}_{S} + \int_{VC} \boldsymbol{B} dv = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} V \rho dv + \int_{SC} V \rho V dA$$

multiplicando vectorialmente esta ecuación por el vector posición r, término a término, resulta :

$$\int_{S.C.} \mathbf{r} \ge d\mathbf{F}_{S} + \int_{V.C.} \mathbf{r} \ge \mathbf{B} dv = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V.C.} \mathbf{r} \ge V \rho dv + \int_{S.C.} \mathbf{r} \ge V \rho V dA$$

que es la ecuación del momento de la cantidad de movimiento.

Para interpretar la ecuación anterior nos servimos de la Fig. 6.3 :



Fig. 6.3 Cantidad de Movimiento Angular en un Volumen de Control

y tenemos :

 $\int \mathbf{r} \times d\mathbf{F}s$ : momento con relación al origen de la fuerza d**Fs** en la S.C.

 $\int_{\kappa} \mathbf{r} \times \mathbf{B} dv$ : momento en relación al origen debido a la fuerza de campo que actúa en un elemento infinitesimal de volumen dv.

 $\frac{\partial}{\partial t} \int_{V.C.} \mathbf{r} \times V \rho dv$ : cantidad de movimiento angular del elemento infinitesimal de masa  $\rho dv$ ;

su integración da el momento de la cantidad de movimiento angular de la masa en el interior del volumen de control.

 $\int \mathbf{r} \times V \rho V d\mathbf{A}$ : tasa de flujo de la cantidad de movimiento angular a través de la s.c.

superficie de control.

## 6.1.4.- Conservación de Energía

La primera Ley de la Termodinámica es :

 $Q - W = \Delta E \qquad (6.5)$ 

Donde:	Q	:	calor introducido al sistema.
	W	:	trabajo realizado por el sistema.
	$\Delta E$	:	variación de la energía del sistema.

El calor y el trabajo de esta ecuación envuelven una interacción del sistema con el area que lo rodea. La energía está asociada a la masa del sistema y normalmente se divide en tres partes :

$$E = U + \frac{1}{2} mV^2 + mgz$$

donde U : energía interna asociada al comportamiento molecular o atómico  $\frac{1}{2}\,mV^2$  : energía cinética

mgz : energía potencial asociada al lugar en el campo gravitacional terrestre

Escribamos la ecuación (7.5) en base a la unidad de masa :

$$q - w = \Delta e$$

donde :

q = Q/m w = W/me = E/m

Consideremos el sistema en el instante t mostrado en la Fig. 6.4. En un momento posterior t+ $\Delta$ t ocupará otra posición.



Fig. 6.4. - Volumen de Control para Balance de Energía.

159

Capítulo VI

La Ecuación de Energía para el sistema es :

$$Q - W = E_f - E_i$$

donde  $E_f$ : Energía final del sistema.  $E_i$ : Energía inicial del sistema.

Dividiendo por  $\Delta t$ , tenemos :

$$\frac{Q}{\Delta t} - \frac{W}{\Delta t} = \frac{E_f - E_i}{\Delta t}$$

El segundo miembro de esta ecuación puede ser desarrollado de la siguiente manera :

$$\frac{E_f - E_i}{\Delta t} = \frac{E_A(t + \Delta t) - E_C(t + \Delta t) + E_B(t + \Delta t) - E_A(t)}{\Delta t}$$

$$=\frac{E_A(t+\Delta t)-E_A(t)}{\Delta t}+\frac{E_B(t+\Delta t)-E_C(t+\Delta t)}{\Delta t}$$

cuando  $\Delta t \rightarrow 0$ , el primer término de esta última ecuación queda :

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{E_A(t + \Delta t) - E_A(t)}{\Delta t} = \frac{\partial}{\partial t} (E)_{V,C} = \frac{\partial}{\partial t} \int edm = \frac{\partial}{\partial t} \int e\rho dv$$

y el último término queda :

$$\frac{E_B(t+\Delta t)-E_C(t+\Delta t)}{\Delta t}=\frac{(\sum \Delta me)_B|_{t+\Delta t}}{\Delta t}-\frac{(\sum \Delta me)_C|_{t+\Delta t}}{\Delta t}$$

en esta ecuación :

el sumatorio  $\Sigma$  es para la masa que cruza la superficie.  $\Delta m$  = es la masa típica.

e = es la energía almacenada asociada con la masa  $\Delta m$ .

En el límite cuando  $\Delta t \rightarrow 0$ , la última ecuación queda :

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{E_B(t + \Delta t) - E_C(t + \Delta t)}{\Delta t} = \int_{S} ed \, \dot{m} - \int_{e} ed \, \dot{m} = \int_{SC} e\rho V dA$$

y finalmente tenemos que :

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{E_f - E_i}{\Delta t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} e\rho dv + \int_{SC} e\rho V dA$$

El trabajo puede se realizado en el contorno del sistema por el efecto de tensiones normales y tangenciales. El trabajo realizado en el contorno del sistema debido a las tensiones normales (presión hidrostática) corresponde al trabajo del flujo. Este es el trabajo realizado sobre el elemento  $(\Delta m)_B$  al moverlo hacia afuera de la región A, en el instante  $\Delta t$  y es igual a pdA $\Delta x$ . El valor dA $\Delta x$  es igual al volumen del elemento de masa  $\Delta m$  y puede ser escrito como  $(\Delta m)_B/\rho$ , de esta forma el trabajo del flujo de entrada y salida es :

$$\left(\frac{dW}{dt}\right)_{\substack{\text{trabajo del}\\\text{flujo}}} = \frac{\lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta W}{\Delta t}\right)_{\substack{\text{trabajo del}\\\text{flujo}}}$$

$$= \frac{\lim_{\Delta t \to 0} \left[ \frac{\sum (p / \rho) (\Delta m)_{B} |_{t + \Delta t}}{\Delta t} - \frac{\sum (p / \rho) (\Delta m)_{C} |_{t + \Delta t}}{\Delta t} \right]}{\Delta t}$$

$$= \int_{S.C.} (p / \rho) \rho V dA$$

y la ecuación de Energía queda :

$$\frac{dQ}{dt} - \frac{dW_s}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} e\rho dv + \int_{S_c} (e + p/\rho)\rho V dA \qquad (6.6)$$

donde

$$e = u + 1/2 V^2 + gz$$

La ecuación ( 6.6 ) establece que la cantidad de calor incrementado al sistema en la unidad de tiempo, menos el trabajo resultante realizado por el mismo, es igual a la razón de variación de la energía almacenada en el volumen de control más el flujo resultante de energía y trabajo del flujo hacia afuera del volumen de control.

#### 6.1.5.- Segunda Ley de la Termodinámica

La Segunda Ley de la Termodinámica para un sistema está dada por la expresión:

$$dS - \frac{dQ}{T} \ge 0$$

donde, S : Entropía del sistema, representa la variación en la entropía menos el calor transmitido para el sistema, dividido para la temperatura absoluta, igual o mayor que cero.

La forma de la segunda Ley de la termodinámica aplicable al volumen de control es igual a :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC_{c}} s\rho dv + \int_{SC_{c}} s\rho V dA + \int_{SC_{c}} \frac{q}{T} dA \ge 0$$

donde q : vector flujo de calor, igual a la tasa de transmisión de calor por unidad de área.
 S : entropía por unidad de masa o entropía específica.

#### 6.2 ECUACIONES DIFERENCIALES.

Existen diferentes métodos para establecer las ecuaciones diferenciales que definen el movimiento de un fluido. Los métodos más usados son:

- 1. Obtener las expresiones diferenciales, a partir de las relaciones integrales, utilizando el cálculo vectorial. Este método es puramente matemático.
- 2. Aplicar las relaciones integrales a un volumen elemental para obtener las expresiones diferenciales. Debe tomarse como límite, cuando el volumen se torna infinitesimal.
- Aplicar las ecuaciones básicas del sistema directamente a un volumen elemental y
  obtener las expresiones integrales básicas para ese volumen.

Para demostrar la utilización de los métodos indicados se encontrará: la ecuación diferencial de continuidad por el primer método; la ecuación de cantidad de movimiento por el segundo; y, la de energía por el tercero.

Es importante recordar que las coordenadas se aplican a puntos en el espacio y en el tiempo y no a la localización individual de las partículas. Por ejemplo, si preguntamos

cuáles son las propiedades y la velocidad V en función de la posición y del tiempo, tendremos:

ó

$$V = V(r,t)$$
$$V = V(x, y, z, t)$$

en coordenadas cartesianas.

#### 6.2.1.- Continuidad.

La ecuación de continuidad (6.1) para el volumen de control deducida anteriormente tiene la forma :

$$\int_{SC} \rho \cdot V dA = -\frac{\partial}{\partial \cdot t} \int_{V,C} \rho \cdot dv$$

Aplicando el teorema de Gauss para transformar el primer miembro en una integral de volumen, tenemos :

$$\int_{V.C.} \nabla \cdot (\rho \cdot V) dv + \frac{\partial}{\partial \cdot t} \int_{V.C.} \rho \cdot dv = \int_{V.C.} \left[ \nabla \cdot (\rho \cdot V) + \frac{\partial \cdot p}{\partial \cdot t} \right] dv = 0$$

Como el volumen de control es arbitrario, el integral debe ser nulo y obtenemos la forma diferencial de la Ecuación de Continuidad :

$$\frac{\partial \cdot \rho}{\partial \cdot t} + \nabla \cdot (\rho V) = 0$$

que también podría ser obtenida por la aplicación directa de la ecuación (6.1) a un volumen elemental.

Para régimen permanente  $\partial \mathbf{p}/\partial t = \mathbf{0}$  y tenemos :

$$\nabla \cdot (\rho V) = 0$$

y para fluido incompresible:

 $\nabla \cdot V = 0$ 

En coordenadas cartesianas la Ecuación de Continuidad tiene la forma :

$$\frac{\partial \cdot \rho}{\partial \cdot t} + \frac{\partial}{\partial \cdot x} (\rho \cdot u) + \frac{\partial}{\partial \cdot y} (\rho \cdot v) + \frac{\partial}{\partial \cdot z} (\rho \cdot w) = 0$$

y para fluido incompresible, es igual a :

$$\frac{\partial \cdot u}{\partial \cdot x} + \frac{\partial \cdot v}{\partial \cdot y} + \frac{\partial \cdot w}{\partial \cdot z} = 0$$

En notación tensorial cartesiana la ecuación de la continuidad es :

$$\frac{\partial \cdot \rho}{\partial \cdot t} + \frac{\partial}{\partial \cdot x_i} (\rho \cdot u_i) = 0$$

#### 6.2.2.- Cantidad de Movimiento.

La ecuación de la cantidad de movimiento se obtiene mediante la aplicación de la forma integral a un volumen elemental.

Es necesario recordar el concepto de tensor de tensión debido a que en el balance de la cantidad de movimiento se consideran las tensiones de cizallamiento y las normales, incluyendo la presión.

Para la deducción se considera un cubo de fluido como el de la Fig. 6.5. Las tensiones se representan por  $\sigma_{ij}$ , donde el primer subíndice caracteriza la cara donde actúa la tensión, y el segundo indica la dirección de la tensión. La cara corresponde al plano perpendicular al eje del índice, por ejemplo, la cara l es perpendicular al eje x ó x1. Las tensiones pueden variar a través del fluido y pueden existir gradientes. El arreglo de las tensiones  $\sigma_{ij}$  (existen 9 de ellas) se consideran presentes en un punto del espacio y son funciones de r y t. El tensor de tensiones puede ser escrito en la siguiente forma:



Fig. 6.5. - Tensión en un punto del espacio. Las fases positivas están mostradas; las opuestas son negativas. Las tensiones en las fases negativas son iguales a las tensiones de las fases positivas pero en direcciones opuestas. (Hughes, W.F., 1974)

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

Este tensor debe ser simétrico, o sea :

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$

Sin embargo, si al volumen elemental se lo comprimiera hasta hacerlo infinitesimal, este giraría con velocidad angular infinita. Existen seis componentes independientes del tensor de tensiones.

Aplicando la ecuación integral de la cantidad de movimiento :

$$Fs + \int_{V.C.} Bdv = \frac{\partial}{\partial \cdot t} \int_{V.C.} V\rho \cdot dv + \int_{V.C.} V\rho V \cdot dA$$

a un cubo elemental, donde las tensiones son componentes de las fuerza externa Fs.

165

Capítulo VI

Con referencia a la Fig. 6.6 :



Fig. 6.6. - Cubo elemental para la deducción de la Ecuación de la Cantidad de Movimiento. Están mostradas solamente las fuerzas en la dirección x. (Hughes, W = 1974)

podemos escribir el balance de la cantidad de movimiento para la dirección x :

$$(\sigma_{1||x+\Delta x} - \sigma_{1||x})\Delta y\Delta z + (\sigma_{2||y+\Delta y} - \sigma_{2||y})\Delta x\Delta z + (\sigma_{3||z+\Delta z} - \sigma_{3||z})\Delta x\Delta y + B_x\Delta x\Delta y\Delta z = \frac{\partial\mu\rho}{\partial t}(\Delta x\Delta y\Delta z) + \Delta y\Delta z(\rho\mu^2_{|x+\Delta x} - \rho\mu^2_{|x}) + \Delta x\Delta z(\rho\mu\psi_{|y+\Delta y} - \rho\mu\psi_{|y}) + \Delta x\Delta y(\rho\mu\omega_{|z+\Delta z} - \rho\mu\omega_{|z})$$

Dividiendo todo por  $\Delta x \Delta y \Delta z$ , tomando el límite cuando  $\Delta x \Delta y \Delta z \rightarrow 0$  y combinando con la ecuación de continuidad para simplificar, se obtiene lo siguiente :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0$$

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

Capítulo VI

$$=\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{13}}{\partial z}+B_x$$

Las componentes y, z se las obtiene de manera análoga y quedan :

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = \rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right)$$
$$= \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial z} + B_y$$
$$\rho \frac{Dw}{Dt} = \rho \left( \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right)$$
$$= \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial z} + B_z$$

o, en notación cartesiana del tensor :

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = \rho \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_i \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + B_i$$
(6.7)

En la ecuación (6.7) los términos en el primer miembro son de aceleración ; el término  $\partial/\partial t$  es transitorio e indica la variación con el tiempo en un punto fijo en el espacio; los términos que no tienen  $\partial/\partial t$  son conocidos como aceleración convectiva.

El operador D/Dt es llamado derivada material o sustantiva y es un operador vectorial.

Las tres ecuaciones anteriores pueden ser generalizadas en forma vectorial, válida para cualquier sistema de coordenadas, de la siguiente manera:

La aceleración es :

$$\rho DV/Dt$$

donde :

$$\frac{DV}{Dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + (V \cdot \nabla)V = \frac{\partial V}{\partial t} + \nabla(V^2/2) - V \times \nabla \times V$$

167

6.2.3.- Cantidad de Movimiento para Flujo sin arrastre.

En un flujo sin fricción no existen tensiones de cizallamiento y las tensiones normales corresponden a la presión que es isotrópica.

Las tensiones normales  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$ ,  $\sigma_{33}$  las definimos como positivas y tenemos :

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = -p$$

de modo que las ecuaciones del movimiento en forma cartesiana son :

$$\rho(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + B_i$$

y sus componentes serán :

$$\rho(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}) = -\frac{\partial p}{\partial x} + B_x$$
$$\rho(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}) = -\frac{\partial p}{\partial y} + B_y$$
$$\rho(\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}) = -\frac{\partial p}{\partial x} + B_z$$

Estas últimas son las **Ecuaciones de Euler para flujo sin fricción**. En forma vectorial general las Ecuaciones de Euler son :

$$\rho[\frac{\partial V}{\partial t} + \nabla(\frac{V^2}{2}) - V \times \nabla \times V] = -\nabla p + \boldsymbol{B} \qquad (6.8)$$

Una primera integral de la ecuación de movimiento puede ser obtenida por la integración de la ecuación (6.8) entre dos puntos, a lo largo de una línea de corriente.

Sea ds un elemento de longitud a lo largo de la línea de corriente, entonces :

$$\rho\left[\frac{\partial V}{\partial t}ds + \nabla(\frac{V^2}{2})\cdot ds - V \times \nabla \times V \cdot ds\right] = -(\nabla p + \rho \nabla \psi) \cdot ds$$

$$(\mathbf{V} \times \nabla \times \mathbf{V}) \cdot \mathbf{ds} = 0$$

y obtenemos una expresión para el flujo sin fricción :

$$\int_{1}^{2} \frac{\partial V}{\partial t} \cdot ds + \frac{V_{2}^{2} - V_{1}^{2}}{2} + \int_{1}^{2} \frac{dp}{\rho} + \Psi_{2} - \Psi_{1} = 0$$

Usualmente la ecuación anterior es para un flujo en régimen permanente, y el potencial gravitacional  $\Psi$  es **gz**, donde **z** es la elevación con referencia a un nivel arbitrario, de tal forma, que la fuerza de gravedad es  $-\rho g \bar{z} + y \bar{z}$  es un vector vertical, entonces :

$$\frac{V_2^2 - V_1^2}{2} + \int_{1}^{2} \frac{dp}{\rho} + g(z_2 - z_1) = 0$$

es la Ecuación de Euler o de Bernoulli generalizada.

Para fluido incomprensible tenemos :

$$\frac{V_2^2 - V_1^2}{2} + \frac{p_2 - p_1}{\rho} + g(z_2 - z_1) = 0$$

que es la Ecuación de Bernoulli.

#### 6.2.4.- Relación de la Tasa de Tensión-Deformación.

Para ampliar este análisis a los fluidos viscosos se debe analizar de manera más detallada las tasas de deformación y tensión.

En un fluido la variación del Tensor de Deformación es :

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

La parte simétrica de este tensor es de deformación, y la antisimétrica es el Tensor Rotación que se relaciona con  $\nabla \mathbf{x} \mathbf{V}$ .

Capítulo VI

El tensor de deformación puede escribirse:

.

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = e_{ij} + w_{ij} \qquad (6.9)$$

donde

 $e_{ij}$  : tensor de deformación  $w_{ij}$  : tensor de rotación.

Los términos del tensor rotación están relacionados con la velocidad angular  $\Omega$ , de una partícula fluida infinitesimal, por las expresiones :

 $\Omega_1 = w_{32} = -w_{23}$  $\Omega_2 = w_{13} = -w_{31}$  $\Omega_3 = w_{21} = -w_{12}$ 

En la forma vectorial se puede escribir la siguiente relación importante :

$$\mathbf{\Omega} = \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{V}$$

que expresa que la velocidad angular física del fluido es igual a la mitad del rotacional del vector velocidad.

Las componentes cartesianas del tensor de las deformaciones y del tensor de rotación están relacionadas de la siguiente forma :

$$e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad ; \qquad e_{xy} = e_{yx} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$
$$e_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad ; \qquad e_{yz} = e_{zy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)$$
$$e_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \qquad ; \qquad e_{xz} = e_{zx} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \qquad (6.10)$$
Capítulo VI

$$\Omega_x = w_{zy} = -w_{yz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right)$$
$$\Omega_y = w_{xz} = -w_{zx} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$
$$\Omega_z = w_{yx} = -w_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

Para un fluido newtoniano se admite que el tensor de las tensiones y el de las deformaciones están relacionados linealmente, y su relación más general tiene la siguiente forma :

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu e_{ij} + \delta_{ij}\lambda\Phi \qquad (6.11)$$

donde

 $\Phi$ : dilatación del fluido definida como  $\nabla \times \mathbf{V}$ , que es nula para fluidos incomprensibles.  $\delta_{ij}$ : es el delta de Kronecker.

 $\lambda$  : es un segundo coeficiente de viscosidad. Otro coeficiente de viscosidad está definido por  $\zeta = \lambda + \frac{2}{3}\mu$  que es nulo para gas monoatómico.

La ecuación (6.11) anterior puede escribirse :

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\partial_{ij}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\right) + \zeta \partial_{ij}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}$$
(6.12)

#### 6.2.5.- Ecuaciones de Navier-Stokes

En la fórmula anterior la expresión  $\sigma_{ij}$  puede ser substituida en la ecuación de cantidad de movimiento para obtener las ecuaciones completas del movimiento de un fluido viscoso, conocidas como Ecuaciones de Navier-Stokes. Estas ecuaciones describen completamente el movimiento de un fluido newtoniano viscoso.

La ecuación (6.7) de cantidad de movimiento expresada en notación cartesiana es :

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = \rho \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + B_i$$

Capítulo VI

y usando la expresión  $\sigma_{ii}$  definida en la expresión (6.12) anterior queda :

$$\rho \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial p}{\partial x_i} + B_i + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \partial_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \zeta \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right)$$

o, en forma vectorial :

$$\rho \frac{DV}{Dt} = \rho \left[ \frac{\partial V}{\partial t} + \nabla \left( \frac{V^2}{2} \right) - V \times \nabla \times V \right] = -\nabla p + B + \nabla \times \left[ \mu \left( \nabla \times V \right) \right] + \nabla \left[ \left( \zeta + \frac{4}{3} \mu \right) \nabla \cdot V \right]$$

Usualmente la viscosidad puede ser removida de las derivadas con error despreciable.

Para fluido incompresible:

 $\nabla \cdot V = 0$ 

esas ecuaciones se reducen a :

$$\rho \frac{DV}{Dt} = -\nabla p + \boldsymbol{B} + \mu \nabla^2 V \,.$$

Es posible comparar las ecuaciones de Navier-Stokes con las de Euler para flujo sin arrastre. Las diferencias están en los términos que contienen la viscosidad; si el fluido es incompresible, los términos de viscosidad tienen la forma  $\partial u_i/\partial x_j$ ,  $(i \neq j)$ . Por tanto, para un fluido incompresible, aunque  $\mu$  no sea nula, los términos viscosos son despreciables si las derivadas de la forma  $\partial u_i/\partial x_j$  son pequeñas, y en ese caso la ecuaciones de Navier-Stokes corresponderán a las de Euler.

Por tanto, las ecuaciones de Navier Stokes se reducen a las de Euler si la viscosidad es pequeña o si las derivadas de las velocidades, en relación a las diferentes direcciones, son pequeñas. Esta aproximación es muy importante en el movimiento de los fluidos.

En muchos flujos se considera que existen dos regiones: una próxima a la superficie sólida donde los términos viscosos son importantes, en este caso se utilizan las ecuaciones de Navier Stokes; y, una región fuera de la superficie, donde la aplicación de las ecuaciones de Euler constituyen una buena aproximación.

#### 6.2.6- Ecuación de la Energía

Esta ecuación se deduce por medio del balance de energía en un volumen de control, obteniéndose la forma diferencial de manera puramente matemática. La deducción considera el siguiente volumen de control:



donde, V: vector velocidad

q : vector flujo de calor. Representa el flujo de calor por conducción y radiación.

El flujo total de calor en el volumen de control dQ/dt sería :

$$-\int_{S,C_i} \boldsymbol{q} \cdot d\boldsymbol{A} = -\int_{S,C_i} \boldsymbol{q}_i d\boldsymbol{A}_i$$

El trabajo realizado por el fluido en el volumen se dividido en dos partes: trabajo reversible realizado por la presión en la superficie de control, e irreversible por las tensiones de cizallamiento en la superficie. En términos del tensor de las tensiones, el trabajo total realizado por el fluido en el volumen de control, en forma cartesiana, es igual a :

$$\frac{dW}{dt} = -\int_{s.c.} u_i \sigma_{ij} dA_j$$

El aumento de energía total (incluyendo cinética, interna y potencial) en el volumen de control es igual a la razón de la variación en el flujo de calor que penetra en el volumen de control, más la razón de generación interna de calor, menos la razón en que el fluido realiza trabajo en las vecindades, de esta forma tenemos :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{v.c.} \rho e dv + \int_{s.c.} \rho e u_i dA_i = - \int_{s.c.} q_i dA_i + \int_{s.c.} u_i \sigma_{ji} dA_j + \int_{v.c.} q''' dv$$

Donde:

e = energia total por unidad de masa =  $V^2/2 + u + \Psi$ 

 $\Psi$  = potencial gravitacional = gZ q'''= es la generación interna de calor por unidad de volumen

El tensor de las tensiones puede ser dividido en dos partes : presión y cizallamiento

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \sigma'_{ij}$$

Usando el Teorema de Gauss, la ecuación de energía queda :

$$\int_{v.c.} \left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho e) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho e u_i) + \frac{\partial}{\partial x_i}q_i + q^{*} + \frac{\partial}{\partial x_i}(p u_i) - \frac{\partial}{\partial x_i}(u_j \sigma'_{ij})\right]dv = 0$$

como el volumen es arbitrario el integrando debe ser nulo, entonces, expandiendo los términos y combinando con la ecuación de continuidad obtenemos :

$$\rho \frac{De}{Dt} = -\frac{\partial}{\partial x_i} q_i - p \frac{\partial u_i}{\partial x_i} - u_i \frac{\partial p}{\partial x_i} + u_i \frac{\partial \sigma'_{ji}}{\partial x_i} + \Phi + q''$$

donde  $\Phi = \sigma_{ij}^{\circ} \delta u_j / dx_i$  es la función de disipación o sea la tasa en que las tensiones de cizallamiento realizan trabajo irreversible sobre el fluido.

Esta ecuación es útil aunque engloba a la ecuación de cantidad de movimiento que puede ser sustraída. En el primer miembro de la ecuación están las tasas de aumento de energía cinética y potencial; el segundo, tercero y cuarto término representan el trabajo realizado por las tensiones, incluyendo la presión. Al tomar el producto escalar V de la ecuación de movimiento, (6.7), admitiendo que la fuerza de campo B<sub>i</sub> es gravitacional conservativa  $-\rho\partial\Psi / \partial x_{i}$ , obtenemos, luego de algunas operaciones con las fórmulas, la forma final de la Ecuación de energía :

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -p \frac{\partial u_i}{\partial x_i} - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + \Phi + q^{"'}$$
(6.13)

donde u = energía por unidad de masa.

Esta ecuación puede ser simplificada :

(i) Introduciendo la Ley de Fourier de la conducción de calor

$$q = -k\nabla T$$

# y admitiendo conductibidad térmica constante, gas perfecto ( $du = c_v dT$ ), además de que :

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \nabla \cdot \boldsymbol{V}$$
$$\nabla \cdot \nabla T = \nabla^2 \cdot T$$

podemos escribir :

$$\rho c_{v} \frac{DT}{Dt} = -p \nabla \cdot \boldsymbol{V} + k \nabla^{2} T - \nabla \cdot \boldsymbol{q}_{r} + q^{"} + \Phi \qquad (6.14)$$

donde qr : vector de flujo de calor por irradiación :

(ii) Si introducimos la entalpía en la última ecuación tenemos :

$$h = u + p/\rho$$

$$\rho \frac{Dh}{Dt} = \frac{Dp}{Dt} + k\nabla^2 T - \nabla \cdot \boldsymbol{q}_r + \boldsymbol{q}^{-} + \Phi$$

y para gas perfecto tenemos :

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = \frac{Dp}{Dt} + k \nabla^2 T - \nabla \cdot \boldsymbol{q}_r + \boldsymbol{q}^{-} + \boldsymbol{\Phi}$$

#### 6.2.7.- Segunda Ley de Termodinámica y la Entropía

La ecuación de la segunda Ley de la Termodinámica aplicada a un volumen de control:

$$\frac{\partial}{\partial T} \int_{v,c} s\rho dv + \int_{s,c} s\rho V \cdot dA - \int_{s,c} \frac{q}{T} dA \ge 0$$

puede ser transformada en una igualdad por la introducción del concepto de producción de entropía por unidad de volumen,  $\theta$ . Introduciendo el vector de flujo de calor **q**, tenemos:

$$\int_{v.c.} \theta dv - \int_{s.c.} \frac{q}{T} dA = \frac{\partial}{\partial t} \int_{v.c.} \rho s dv + \int_{s.c.} \rho s V \cdot dA$$

Capítulo VI

Usando la Ley de Gauss y la ecuación de continuidad, obtenemos :

$$\theta - \nabla \cdot (\frac{q}{T}) = \rho \frac{Ds}{Dt}$$

combinando con la ecuación de la energía y la relación básica de la termodinámica, tenemos :

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \rho T \frac{Ds}{Dt} - p \nabla \cdot V$$

que es la forma Euleriana de :

$$du = Tds - p d(1/\rho)$$

Admitiendo que se mantiene la Ley de Fourier y despreciando la radiación,  $\theta$  se puede expresar en la forma :

$$\theta = \frac{\Phi}{T} + \frac{\boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{q}}{kT^2} = \frac{\Phi}{T} + k \frac{(\nabla T)^2}{T^2}$$
(6.15)

que muestra la razón de producción de entropía en términos de las irreversibilidades de la corrientes de calor y de la disipación viscosa.

#### 6.3 METODOLOGIA PARA RESOLVER PROBLEMAS.

Las ecuaciones deducidas anteriormente no pueden ser consideradas como fórmulas prácticas para la resolución de problemas de fluidos. El proceso de aplicación de esas ecuaciones mediante métodos numéricos buscando obtener resultados predecibles, puede no dar los resultados esperados, por tanto, es muy importante la comprensión e interpretación del significado de las ecuaciones y las limitaciones o restricciones de sus formas especiales.

El estudio de modelos matemáticos parte de las leyes básicas, de la definición de las ecuaciones correspondientes del sistema, de la deducción de las ecuaciones integrales del volumen de control y de las ecuaciones diferenciales, y de la presentación de algunas formas simplificadas de esas ecuaciones. Para realizar este proceso se presenta la tabla de fórmulas que aparecen en el Anexo B.

## 6.3. 1. Formas Especiales de las Ecuaciones Integrales.

1. Continuidad

Flujo permanente unidimensional:

$$\rho_1 A_1 V_1 = \rho_2 A_2 V_2$$

### 2. Cantidad de movimiento

Flujo permanente unidimensional, con densidad y velocidad uniformes en las áreas de entrada y salida:

$$F_{x} = \mathbf{m} (\mathbf{V}_{2x} - \mathbf{V}_{1x})$$
$$F_{y} = \mathbf{m} (\mathbf{V}_{2y} - \mathbf{V}_{1y})$$
$$F_{z} = \mathbf{m} (\mathbf{V}_{2z} - \mathbf{V}_{1z})$$

3. Cantidad de movimiento angular Velocidad uniforme en A<sub>1</sub> y A<sub>2</sub>, flujo permanente a través del rotor:

$$T_{z} = \rho_{1}Q_{1} \left( r_{2}V_{t2} - r_{1}V_{t1} \right)$$

#### 4. Energía

Flujo permanente unidimensional:

$$q - w_s = \left(\frac{P_2}{\rho_2} - \frac{P_1}{\rho_2}\right) + (u_2 - u_1) + \frac{(V_2^2 - V_1^2)}{2} + g(z_2 - z_1)$$

#### 6.3.2. Formas Especiales de Ecuaciones Diferenciales

## 1. Continuidad

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \left( \rho \, \boldsymbol{V} \right) = 0$$

Para fluido incompresible es :

Capítulo VI

$$\nabla \cdot V = 0$$

#### 2. Cantidad de movimiento en forma vectorial

$$\rho \frac{DV}{Dt} = -\nabla p + \mathbf{B} - \nabla \times \left[ \mu (\nabla \times V) \right] + \nabla \left[ \left( \zeta + \frac{4}{3} \mu \right) \nabla \cdot V \right]$$

Para densidad y viscosidad constantes la ecuación de la cantidad de movimiento es :

$$\rho \frac{DV}{Dt} = -\nabla p + B - u\nabla^2 V$$

#### 3. Ecuación de Energía

$$\rho c_{v} \frac{DT}{Dt} = -p \nabla \cdot V + k \nabla^{2} T - \nabla \cdot q_{r} + \Phi + q^{"}$$

## 6.3.3. Solución de Problemas

Existen los siguientes métodos para resolver problemas físicos reales:

- 1. Ecuaciones integrales.
- 2. Ecuaciones diferenciales.
- 3. Leyes básicas y desarrollo de ecuaciones apropiadas para una situación particular.

Las Ecuaciones Integrales son apropiadas cuando se desea conocer efectos globales, como por ejemplo, la fuerza total de un fluido sobre la pared de un tubo o en una pala de una hélice o rotor.

Las Ecuaciones Diferenciales son apropiadas cuando se desea conocer las condiciones distributivas, como los campos de velocidad y presión, en torno a un cuerpo aerodinámico.

El último método se considera particularmente apropiado para el desarrollo de las ecuaciones en la capa límite y la obtención de resultados.

El procedimiento para la solución de un problema físico es el siguiente:

(a) Identificación de un problema físico específico.

(b) Representación del modelo físico. Representación del problema físico real por un nuevo problema simplificado.

(c) Modelo matemático. Establecimiento de las Ecuaciones correspondientes al modelo físico.

- (d) Solución. Obtención de una solución de las Ecuaciones para el modelo.
- (e) Experimentación. El paso final consiste en determinar la exactitud y bondad del modelo de manera experimental. Esta experiencia permitirá mejorar el modelo.

## Ejemplo.-

Considere el flujo permanente de un fluido compresible en un tubo curvo, como se muestra en la siguiente figura. Determinar la fuerza del fluido sobre el trecho del tubo entre 1 y 2.



## Desarrollo.-

Primero escogemos un volumen de control para el fluido como el mostrado por la línea de puntos.

La ecuación de cantidad de movimiento para el volumen de control es :

$$\boldsymbol{F}_{s} + \int_{\boldsymbol{v},c} \boldsymbol{B} \, d\boldsymbol{v} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\boldsymbol{v},c} \boldsymbol{V} \, \rho \, d\boldsymbol{v} + \int_{\boldsymbol{v},c} \boldsymbol{V} \, \rho \, \boldsymbol{V} \, d \, \boldsymbol{A}$$

pero, en nuestro caso, el flujo es permanente y queda :

$$F_{s} + \int_{v.c.} B \, dv = \int_{s.c.} V \, \rho \, V \, d \, A$$

Admitamos que las presiones y velocidades sean uniformes en las áreas A1 y A2.

Las fuerzas superficiales para las direcciones x, y son :

$$F_{sx} = p_1 A_1 - p_2 A_2 \cos \theta + F_{px}$$
  
$$F_{sy} = -p_2 A_2 \operatorname{Sen} \theta + F_{py}$$

donde p es la presión y  $F_{px}$ ,  $F_{py}$  son las fuerzas desconocidas de la pared sobre el fluido.

La única fuerza de campo es la de la gravedad, y es igual al peso del fluido contenido entre las secciones 1, 2. Este peso en muchos problemas es despreciable, comparando con otras fuerzas, y en este caso no lo consideraremos.

Los términos de flujo de la cantidad de movimiento quedan :

$$\int_{S.C.} V_x \rho V dA = \rho_2 A_2 V_2^2 \cos \theta - \rho_1 A_1 V_1^2$$
$$\int_{S.C.} V_y \rho V dA = \rho_2 A_2 V_2^2 \sin \theta$$

entonces, las ecuaciones quedan :

$$F_{px} = p_2 A_2 \cos \theta - p_1 A_1 + \rho_2 A_2 V_2^2 \cos \theta - \rho_1 A_1 V_1^2$$

$$F_{py} = p_2 A_2 \operatorname{Sen} \theta + \rho 2 A_2 V_2^2 \operatorname{Sen} \theta$$

Las componentes de la fuerza del fluido sobre el tubo, digamos Rx, Ry serían opuestas a Fpx, Fpy y de esta forma tenemos :

 $R_x = p_1 A_1 - p_2 A_2 \cos \theta + \rho_1 A_1 V_1 (V_1 - V_2 \cos \theta)$  $R_y = -p_2 A_2 \operatorname{Sen} \theta - \rho_2 A_2 V_2^2 \operatorname{Sen} \theta$ 

## ANEXO A

# TABLA 1.-PROPIEDADES DE LAS OLAS ARMONICAS EN AGUAS PROFUNDAS

Elevación de líneas de igual presión (a calado z)	$\zeta_z = \zeta_a e^{-kz} Cos  k(x - V_w t)$
Perfil de la superficie (elevación de la línea de igual presión en z=0) (primera aproximación)	$\zeta = \zeta_o = \zeta_a Cos  k(x - V_w t)$ $= \zeta_a Cos(kx - \omega_w t)$
Velocidad horizontal del agua	$\mu = k\zeta_a V_w e^{-kz} Cos  k(x - V_w t)$
Velocidad vertical del agua	$w = k\zeta_a V_w e^{-kz} Sen  k(x - V_w t)$
Velocidad de ola	$V_{w} = \frac{\lambda_{w}}{T_{w}} = \frac{g}{\omega_{w}} = \left(\frac{g\lambda_{w}}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}}$
Longitud de ola	$\lambda_{w} = \frac{2 \pi V_{w}^{2}}{g} = \frac{2 \pi g}{\omega_{w}^{2}} = \frac{g T_{w}^{2}}{2 \pi}$
Número de ola	$k = \frac{2\pi}{\lambda_{w}} = \frac{\omega_{w}^{2}}{g} = \frac{g}{V_{w}^{2}} = \frac{4\pi^{2}}{gT_{w}^{2}}$
Período de ola	$T_{w} = \left(\frac{2 \pi \lambda_{w}}{g}\right)^{\frac{1}{2}}$
Presión	$p = \rho g (z - \zeta)$ $p = \rho g z - \zeta_a \rho g e^{-kz} Cos(kx - \omega_w t)$ $\rho g z = \text{presión hidrostática}$
Máxima pendiente de ola (primera aproximación)	$\alpha_{M} = k\zeta_{a} = \frac{2\pi\zeta_{a}}{\lambda_{w}} = \frac{\pi h_{w}}{\lambda_{w}}$
Energía por unidad de superficie de ola	$E = \frac{1}{2} \rho \zeta_a^2$

(Battacharyya, R., 1987)

# **TABLA 2.-** PROPIEDADES DE LAS OLAS ARMONICAS EN AGUAS DE<br/>CUALQUIER CALADO.

Elevación de líneas de igual presión	$\zeta_z = \zeta_a \frac{Senh(-z+h)}{Senh(kh)} Cos  k(x-V_w t)$
Perfil de la superficie (elevación de la línea de igual presión en z=0)	$\zeta_o = \zeta_a Cos  k(x - V_w t)$
Velocidad horizontal del agua	$\mu = \zeta_a V_w k \frac{Coshk(-z+h)}{Sinh(kh)} Cosk(x-V_w t)$
Velocidad vertical del agua	$w = \zeta_a V_w k \frac{Senh(-z+h)}{Senh(kh)} Sen k(x - V_w t)$
Velocidad de ola o celeridad	$V_{w} = \left(\frac{gL_{w}}{2\pi} = \tanh kh\right)^{1/2}$
Presión	$p = \rho g z - \zeta_a \rho g \frac{Cosh(-z+h)}{Cosh(kh)} Cosh(x-V_w t)$
	ho gz = presión hidrostática h = calado del agua

(Battacharyya, R., 1987)

Anexo B

Leyes Básicas	Ecuaciones del Sistema	Ecuaciones Integrales (Volumen de Control)	Ecuaciones Diferenciales
1. CONTINUIDAD	$\frac{d}{dt}(m)=0$	$\int_{s.c.} \rho V  d  A = \frac{\partial}{\partial t} \int_{v.c.} \rho  dv$	$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \left( \rho  \boldsymbol{V} \right) = 0$
2. CANTIDAD DE MOVIMIENTO LINEAL	$\frac{d}{dt}(mV) = F$	$F_{s} + \int_{v,c} B dv = \frac{\partial}{\partial t} \int_{v,c} V \rho dv$ $+ \int_{s,c} V \rho V dA$	$\rho \frac{Dv}{Dt} = \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial z} + By$ $\rho \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + Bi$ $\rho \frac{DV}{Dt} = -\nabla p + B + \nabla \times \left[ \mu (\nabla \times V) \right] + \nabla \left[ \left( \zeta + \frac{3}{4} \mu \right) \nabla \cdot V \right]$
3. CANTIDAD DE MOVIMIENTO ANGULAR	$\frac{d}{dt}(m\mathbf{r}\times\mathbf{V})=\mathbf{r}\times\mathbf{F}$	$\int_{sc} \mathbf{r} \times d\mathbf{F}_{s} + \int_{vc} \mathbf{r} \times \mathbf{B} dv =$ $\frac{\partial}{\partial t} \int_{vc} \mathbf{r} \times \mathbf{V} \rho dv + \int_{sc} \mathbf{r} \times \mathbf{V} \rho \mathbf{V} dA$	
4. ENERGÍA	$\frac{d}{dt}(E) = \frac{dQ}{dt} - \frac{dW}{dt}$	$\frac{\mathrm{dQ}}{\mathrm{dt}} - \frac{\mathrm{dW}_{s}}{\mathrm{dt}} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} e\rho \mathrm{dv} + \int_{SC} (e + p/\rho)\rho V \cdot \mathrm{dA}$	$\rho c_{v} \frac{DT}{Dt} = -p\nabla \cdot V + k\nabla^{2} T$ $-\nabla \cdot q_{r} + q^{m} + \Phi ,$ $\rho \frac{Dh}{Dt} = \frac{Dp}{Dt} + k\nabla^{2} T - \nabla \cdot q_{r}$ $+ q^{m} + \Phi$

ANEXO B ECUACIONES INTEGRALES Y DIFERENCIALES

5. SEGUNDA LEY TERMODINÁMICA	$dS - \frac{dQ}{T} \ge 0$	$\frac{\partial}{\partial t} \int_{v.c}^{v.c} S\rho \cdot dv + \int_{s.c}^{v.c} S\rho V \cdot dA$ $- \int_{s.c}^{v.c} \frac{q}{T} dA \ge 0$	$\int_{v.c.} \frac{\partial dv}{\partial t} - \int_{s.c.} \frac{q}{T} dA = \frac{\partial}{\partial t} \int_{v.c.} \rho s dv$ $+ \int_{s.c.} \rho s V \cdot dA$
			$\theta = \frac{\Phi}{T} + \frac{q \cdot q}{k T^2} = \frac{\Phi}{T} + k \frac{(\nabla T)^2}{T^2}$

(Hughes, W.F., 1974)

## ANEXO C

#### 1. Principio de Tensión de Euler - Cauchy

Las fuerzas de cuerpo no son afectadas por la presencia o ausencia de cuerpos en el espacio. La única fuerza a considerar es la llamada "mutual" o fuerza gravitacional.

El principio de Euler-Cauchy es el siguiente: "Existe un campo tensorial simétrico T llamado tensor tensión o tensor de las tensiones, tal que :

$$t = T(n) = Tn$$

esto es, existe un tensor simétrico T que aplicado al vector unitario n da lugar al vector t"

Las fuerzas en general son las siguientes:



Todas estas fuerzas son vectoriales.

Donde : t se puede descomponer en :

- t<sub>n</sub> vector normal a la superficie. Vector tensión normal
- $t_{\tau}$  vector tangencial a la superficie. Vector tensión de corte

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}_n + \mathbf{t}_{\tau}$$

La magnitud de  $t_n$  corresponde a la presión :

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_n &= \mathbf{p}\mathbf{n} + \mathbf{t'}_{\sigma} + \mathbf{t}_{\tau} \\ \mathbf{t}_n &= \mathbf{p}\mathbf{n} + \mathbf{t}_{v} \end{aligned}$$

donde :

pn: valor unitario de la dirección normal
 t<sub>v</sub>: valor de tensión viscosa

Sabemos, por el principio enunciado que:

 $\mathbf{T}(\mathbf{n}) = \mathbf{t}$  $\mathbf{t}_{\mathbf{n}} = \mathbf{p}\mathbf{n} + \mathbf{t}_{\mathbf{v}}$ 

luego :

 $\mathbf{T}(\mathbf{n}) = \mathbf{t}_{\mathbf{n}} = \mathbf{p}\mathbf{n} + \mathbf{t}_{\mathbf{v}}$ 

así podemos descomponer T de la siguiente forma :

 $\mathbf{T} = \mathbf{P} + \mathbf{\tau}$ 

 $\mathbf{P}(\mathbf{n}) = \mathbf{p}\mathbf{n}$ 

 $\tau(\mathbf{n}) = \mathbf{t}_{v}$ 

tal que :

donde :

P tensor presión

τ tensor efecto viscoso

La descomposición del vector  $\mathbf{T}$ , en términos de sus componentes puede, escribirse en forma matricial :

 $S \simeq$ 

Anexo C

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{T} & = & \mathbf{P} & + & \mathbf{\tau} \\ \hline \mathbf{T} & \mathbf{T}_{xy} & \mathbf{T}_{xz} \\ \mathbf{T}_{yx} & \mathbf{T}_{yy} & \mathbf{T}_{yz} \\ \mathbf{T}_{zx} & \mathbf{T}_{zy} & \mathbf{T}_{zx} \end{array} = \begin{vmatrix} \mathbf{p} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{p} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{p} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{\tau}_{xx} & \mathbf{\tau}_{xy} & \mathbf{\tau}_{xz} \\ \mathbf{\tau}_{yx} & \mathbf{\tau}_{yy} & \mathbf{\tau}_{yz} \\ \mathbf{\tau}_{zx} & \mathbf{\tau}_{zy} & \mathbf{\tau}_{zx} \end{vmatrix}$$



# 2. Deducción de la Ecuación de Cauchy

Para establecer las Ecuaciones de movimiento, debemos tener en cuenta que la suma de fuerzas que actúan sobre el sistema es igual a la tasa de variación del momentum linear (cantidad de movimiento).

Basado en este principio (Euler), Cauchy establece la ecuación :

$$F = \mathbf{m}\,\vec{a} = \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} \,\Delta x. \,\Delta y. \,\Delta z \Rightarrow \frac{\mathbf{m}\,\vec{a}}{V} = \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt}$$



$$\vec{F}_{cuerpo} = \rho b \,\Delta x. \,\Delta y. \,\Delta z \to \frac{\vec{F}_{cuerpo}}{V} = \rho b$$

Fuerzas de superficie :

 $- \left\{ \left[ T_{xx} \right]_{x+\Delta x} - \left[ T_{xx} \right]_{x} \right\} \Delta y \Delta z - \left\{ T_{yx} \right]_{y+\Delta y} - \left[ T_{yx} \right]_{y} \right\} \Delta x \Delta z - \left\{ \left[ T_{zx} \right]_{z+\Delta z} - \left[ T_{zx} \right]_{z} \right\} \Delta x \Delta y = \mathbf{F}_{sup}$ en dirección x

Haciendo tender al límite  $\Delta x \Delta y \Delta z \rightarrow 0$  obtenemos :

$$\left(\frac{\vec{F}_{sup}}{V}\right)_{x} = -\left(\frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial T_{zx}}{\partial z}\right)$$

En forma análoga para las otras direcciones tenemos :

$$\left(\frac{\vec{F}_{sup}}{V}\right)_{y} = -\left(\frac{\partial T_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{zy}}{\partial z}\right)$$

Anexo C

$$\left(\frac{\vec{F}_{sup}}{V}\right)_{z} = -\left(\frac{\partial T_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z}\right)$$

sumando las tres componentes :

$$\frac{\overline{F}_{sup}}{V} = -\operatorname{div} T = -(\nabla T)$$

Llevando esta ecuación hacia la Ecuación de Newton :

$$\vec{ma} = \sum \vec{F}$$

tendremos :

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \mathbf{F}_{cuerpo} - \mathbf{F}_{sup \, erficie}$$

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \rho \mathbf{b} - (\nabla \mathbf{T}) \qquad \text{Ecuación de Cauchy}$$

donde :

Du

$$\rho \frac{DV}{Dt}$$
: tasa de variación del momentum linear (cantidad de movimiento) por unidad de volumen

 $\rho b$ : resultante de las fuerzas de cuerpo por unidad de volumen

 $- div T = -(\nabla T)$ : resultante de las fuerzas de contacto o de superficie por unidad de volumen

Usando la descomposición del tensor de las tensiones

$$\mathbf{T}=\mathbf{P}+\mathbf{\tau}$$

y haciendo  $\mathbf{b} = \mathbf{g}$ , la Ecuación de Cauchy puede escribirse en la siguiente forma :

$$\rho \frac{D \mathbf{v}}{D t} = -\nabla p - [\nabla \boldsymbol{\tau}] + \rho \boldsymbol{g} \tag{1}$$

donde :

 $\frac{Dv}{Dt}$  : aceleración sustantiva

- $\nabla p$  : gradiente de presión. Representa la fuerza de presión por unidad de volumen
- τ : tensor tensión viscosa

p : presión

- ρ : densidad del fluido
- $[\nabla r]$ : divergente del tensor tensión viscosa. Representa la fuerza viscosa por unidad de volumen

g : aceleración de la gravedad

 $\rho g$  : fuerza de campo gravitacional por unidad de volumen

Con respecto a los dos primeros términos del segundo miembro de la ecuación (1), caben los siguientes comentarios :

$$div T = \nabla T + [\nabla (p + \tau)]$$

pero :  $\mathbf{P} = \mathbf{pI}$ 

entonces : div  $\mathbf{P} = [\nabla \cdot \mathbf{P}] = \nabla \mathbf{p} = \text{gradiente } \mathbf{p}$ 

También podemos escribir que :

*div* 
$$T = \nabla p + [\nabla \tau]$$

Los términos para la tensión normal y tensión de corte se los puede encontrar de la siguiente manera :

$$T = \begin{bmatrix} \tau_{\sigma} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tau_{z} \end{bmatrix}$$

puede escribirse :

$$\begin{vmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p + \tau_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & p + \tau_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & p + \tau_{zz} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & 0 & \tau_{yz} \\ \tau_{zz} & \tau_{zy} & 0 \end{vmatrix}$$
(2)

y también:

 $T = p I + \tau$ 

puede escribirse:

$$\begin{vmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p + \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & p + \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zz} & \tau_{zy} & p + \tau_{zz} \end{vmatrix}$$

debido a que:

$$p \boldsymbol{I} = \begin{vmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{vmatrix}$$
$$\boldsymbol{\tau} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{\tau}_{xx} & \boldsymbol{\tau}_{xy} & \boldsymbol{\tau}_{xz} \\ \boldsymbol{\tau}_{yx} & \boldsymbol{\tau}_{yy} & \boldsymbol{\tau}_{yz} \\ \boldsymbol{\tau}_{zz} & \boldsymbol{\tau}_{zy} & \boldsymbol{\tau}_{zz} \end{vmatrix}$$

En la Ecuación (2) tenemos que :

- $\boldsymbol{\tau}_{\sigma}$  : representa las componentes de tensor tensión normal
- $\tau_z$  : representa las componentes del tensor tensión de corte

## 3. Deducción de la Ecuación de Continuidad

Para deducir esta ecuación debe hacerse un balance de masas sobre un elemento de volumen  $\Delta x \Delta y \Delta z$  a través de cual un fluido está fluyendo. De acuerdo con la ley de conservación de masa debe cumplirse que la tasa instantánea de variación de la masa dentro del volumen de control  $\Delta x \Delta y \Delta z$  es igual a la tasa instantánea neta de variación de la masa a través de la superficie de control  $\Delta x \Delta y$ .

Sea un elemento de fluido  $\Delta x \Delta y \Delta z$  (volumen de control  $\Delta$ .C.) y las superficies que lo delimitan  $\Delta y \Delta z$ ;  $\Delta x \Delta z$ ;  $\Delta x \Delta y$  (superficie de control S.C.)



Analizando la figura tenemos que :

 $\frac{\partial \rho}{\partial t} \Delta x.\Delta y.\Delta z \qquad : \text{tasa instantánea de variación de la masa dentro del V.C.} \\ \{ [\rho v_x]_x - [\rho v_x]_{x+\Delta x} \} \Delta y.\Delta z : \text{ flujo neto de masa en dirección x a través de la S.C.} \\ \{ [\rho v_y]_y - [\rho v_y]_{y+\Delta y} \} \Delta x.\Delta z : \text{ flujo neto de masa en dirección y a través de la S.C.} \\ \{ [\rho v_z]_z - [\rho v_z]_{z+\Delta z} \} \Delta x.\Delta y : \text{ flujo neto de masa en dirección z a través de la S.C.} \end{cases}$ 

De acuerdo con la Ley de Conservación de masa tenemos :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \Delta x. \Delta y. \Delta z = \{ ([\rho v_x]_x - [\rho v_x]_{x+\Delta x}) \Delta y. \Delta z + ([\rho v_y]_y - [\rho v_y]_{y+\Delta y}) \Delta x. \Delta z + ([\rho v_z]_z - [\rho v_z]_{z+\Delta z}) \Delta x. \Delta y \}$$

que también puede escribirse :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \Delta x. \Delta y. \Delta z = -\Delta x. \Delta y. \Delta z \left\{ \frac{[\rho v_x]_{x+\Delta x} - [\rho v_x]_x}{\Delta x} + \frac{[\rho v_y]_{y+\Delta y} - [\rho v_y]_y}{\Delta y} + \frac{[\rho v_z]_{z+\Delta z} - [\rho v_z]_z}{\Delta z} \right\}$$

haciendo tender al límite los valores  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$  tenemos:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\left[\frac{\partial (\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho v_z)}{\partial z}\right]$$

de donde:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla_{\cdot} \rho \, \mathbf{v} = 0 \qquad \text{es la Ecuación de Continuidad}$$

Esta ecuación describe la tasa de variación de la densidad  $\rho$  en un punto debido a la variación del flujo de masa  $\rho v$ . Físicamente también se la puede interpretar de la siguiente manera: la tasa de variación de la densidad dentro de un elemento de volumen fijo en el espacio, es igual al flujo neto de masa hacia adentro del elemento de volumen, por unidad de volumen.

La ecuación de continuidad puede escribirse en otra forma equivalente utilizando la siguiente identidad vectorial :

$$(\nabla . \rho \mathbf{v}) = \rho(\nabla . \mathbf{v}) + (\nabla \rho . \mathbf{v})$$

y utilizando también la definición de derivada sustantiva:

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathbf{v}.\nabla\rho$$

y tendremos que:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho(\nabla . \mathbf{v}) = 0$$

Así mismo la Ecuación de Continuidad en términos de sus componentes y del sistema de coordenadas será :

Coordenadas rectangulares :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho v_z)}{\partial z} = 0$$

Coordenadas Cilíndricas:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial (\rho r v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (\rho v_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial (\rho v_z)}{\partial z} = 0$$

Coordenadas Esféricas:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial (\rho r^2 v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (\rho v_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (\rho v_\Phi)}{\partial \Phi} = 0$$

## 4. Relación entre las ecuaciones de Cauchy, Navier - Stokes y Euler.

## (1) ECUACION DE CAUCHY

$$\rho \frac{D \mathbf{v}}{D t} = -\nabla p - [\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}] + \rho \boldsymbol{g}$$

## (2) ECUACION DE NAVIER-STOKES

Cuando el tensor tensión viscosa ( $\tau$ ) obedece la ecuación constitutiva de los fluidos newtonianos, la ecuación de movimiento que de ella resulta se llama **Ecuación de Navier-Stokes** cuya formulación en forma vectorial y considerando  $\rho$  y  $\mu$  constantes es igual a :

$$\rho \frac{D \mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \rho \mathbf{g}$$

## (3) ECUACION DE EULER

Cuando el tensor tensión viscosa ( $\tau$ ) obedece la ecuación constitutiva de los fluidos perfectos ( $\tau$ = 0), la Ecuación de Cauchy da origen a la **Ecuación de Euler**, la cual en forma vectorial se la escribe de la siguiente manera :

$$\rho \frac{D \mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p + \rho \, \mathbf{g}$$

## **BIBLIOGRAFIA**

- Tritton D. J.: Physical Fluid Dynamics, 2a. Edition, Oxford Science Publications, 1999.
- Knauss John A.: Introduction to Physical Oceanography, 2a. Edition, Prentice Hall, 1999.
- Newman J.N.: Marine Hydrodynamics, The MIT Press, 1999.
- Bhattacharyya Rameswar: Dynamics of Marine Vehicles, John Wiley & Sons Inc., 1987.
- Gillmer Thomas C.- Johnson Bruce: Introduction to Naval Architecture, Naval Institute Press, 1982.
- Marco G. Velarde: Determinacao das Caracteristicas Hidrodinamicas para Navios Cargueiros no Projeto Preliminar, Universidad Federal de Rio de Janeiro, Brasil, 1977.
- Rawson K.J. Tupper E.C.: Basic Ship Theory Vol I, II, Longman Group Limited, 1976.
- Schenck Hilbert Jr.: Introduction to Ocean Engineering, McGraw-Hill Book Company, 1975.
- Silvester Richard: Coastal Engineering, I, Elsevier Scientific Publishing Company, 1974.
- > Hughes W.F., Brighton J.A.: Dinamica dos Fluidos, Mc. Graw Hill, 1974.
- McCormick Michael: Ocean Engineering Wave Mechanics, Wiley-Interscience, 1973.
- Alaez José: Resistencia Viscosa de Buques, Canal Experiencias Hidrodinámicas El Pardo, Madrid, España, 1972.
- Gillmer Thomas: Modern Ship Design, United States Naval Institute, 1970
- Sellin Robert: Flow in Channels, Macmillan and Co Ltd., 1969.

- Muir Wood A. M.: Coastal Hydraulics, Macmillan and Co Ltd., 1969.
- Myers John Holm Carl McAllister R.: Handbook of Ocean and Underwater Engineering, McGraw-Hill Book Company, 1969.
- Jones, J. B., Hawkins, G. A., Engineering Thermodynamics, John Wiley & Sons, Inc, 1968.
- Milne-Thomson L.M.: Theoretical Aerodynamics, Macmillan and Co Ltd., 1968.
- Vallentine, H.R.,: Applied Hydrodynamics, Second Edition, Butterworths, London, 1967.
- Neumann Gerhard Pierson Willard Jr.: Principles of Physical Oceanography, Prentice-Hall Inc., 1966.
- Binder Raymond: Fluid Mechanics, 4ta Edition, Prentice-Hall of India Ltd., 1964.
- > Wiegel Robert: Oceanographical Engineering, Prentice-Hall Inc., 1964.
- Blagoveshchensky S.N.: Theory of Ship Motions Vol I, II, Dover Publications Inc., 1962.
- Pierson, W. J., Neumann, G., James, R. W., Practical Methods for Observing and Forecasting Ocean Waves, Hydrographic Office, Secretary Of the Navy, 1960.
- Abbot Ira H., Von Doenhoff Albert E. : Theory of Wing Sections, Dover Publications Inc., 1959.
- Dryden Hugh Murnaghan Francis Bateman H.: Hydrodynamics, Dover Publications Inc., 1956.
- Lamb Sir Horace: Hydrodinamics, Dover Publications Inc, Sexta Edición, 1945.
- Universidad de Sao Paulo.- Departamento de Engenharia Naval.- Tanque de Probas Numérico TPN, 2002.
- http://www.diam.unige .it/~irro/lecture\_e.html. Simulación de flujo de fluídos. 2005.



~

Impreso en el Centro de Difusión y Publicaciones - ESPOL Campus "Gustavo Galindo V" Km. 30 5, via Perimetral Teléfonos: 2-269225 /228 • Fax: (593-4) 2- 269226 E-mail. cdp@espol.edu.ec Guayaquil- Ecuador